Topologia I
Harjoitus 11 (viimeinen)
Viikko 17 (22.4.-26.4. 2013)

1. (12:15 versio) Tutki ovatko seuraavat funktiot f tasaisesti jatkuvia määrittelyjoukoissaan:
(i) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$,
(ii) $f(x) = \sin(|x|_2)$, $x \in \mathbf{R}^n$, missä $|\cdot|_2$ on euklidinen normi.

2. (13:3) Tutki seuraavista euklidisen avaruuden joukoista A_j, ovatko ne (i) kompakteja, (ii) täydellisiä: $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 < 4\}$, $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

3. (13:9) Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $r > 0$, ja (x_n) sellainen X:n pistejono, että $d(x_n, x_m) \geq r$ kaikilla $n \neq m$. Näytä, ettei X ole kompakti.

4. (13:4) Olkoon X metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ laskeva jono epätyhjiä kompakteja X:n osajoukkoja. Osoita, että leikkausjoukko $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti. *Neuvo:* Aloita valitsemalla $x_n \in A_n$ kaikilla n.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko. Näytä, että on olemassa sellainen $(c_1, c_2, c_3) \in A$, että $x + y + z \geq c_1 + c_2 + c_3$ kaikilla $(x,y,z) \in A$. *Vihje:* Lause 13.26 ja sopiva jatkuva kuvaus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

6. (14:12) Olkoon $E = \{(x,y) : |x| < 2|y|\} \subset \mathbb{R}^2$. (i) Onko E yhtenäinen? (ii) Onko sulkeuma $\overline{E}$ yhtenäinen?

Muistutus: 2. kurssikoe on tiistaina 7.5. klo 13-15. Ilmoita luennoijalle sähköpostitse jos aika ei sovi esteen takia. Vaihtoehtoinen koetilaisuus järjestetään.

Koealue: luvut 7 - 13, sivut 54 - 109. Tuloavaruudet (kohdat 10.8 - 10.15, 11.9 - 11.10, 13.16) ja peitteet (kohdat 13.31 - 13.35, 13.37 - 13.40) **ei käsitelty** luennoilla 2013. Esittelen lukua 14 (yhtenäisyys) viimeisen luentoviikon aikana, mutta luku 14 ei kuulu 2. kokeen koealueeseen. Katsaus vanhoihin koetehtäviin ke 24.4 noin klo 11 alkaen.