Topologia I
Harjoitus 10
Viikko 16 (15.4.-19.4. 2013)
Ratkaisuehdotuksia, Heikki Koivupalo

1. (11:10) Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ kun $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiojono (f_n) $\mathbb{R}$:ssä (i) pisteittäin, (ii) tasaisesti. Tutki samat asiat myös, kun $\mathbb{R}$:ssä on diskreetti $\{0, 1\}$-metriikka.

Ratkaisu. (i) Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Huomataan, että oli $n \in \mathbb{N}$ mikä tahansa, niin $\max\{0, x - n\} = 0$, kun $n \geq x$. Näyttää siis siltä, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee:

$$f_n(x) \to 0, \text{ kun } n \to 0.$$

Näin onkin, sillä olipa ϵ mikä tahansa positiivinen luku, niin

$$|f_n(x) - 0| = \max\{0, x - n\} = 0 < \epsilon,$$

kun $n \geq n_0$, missä n_0 on pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $n_0 \geq x$. Siis (f_n) suppenee pisteittäin.

(ii) Lauseen 11.21. nojalla riittää tutkia, suppeneeko (f_n) tasaisesti kohti nollakuvausta. (Siis kuvausta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.) Kohdan 11.23. huomautus (2) aiheuttaa epäilyksen: jokaista $\epsilon > 0$ kohti pitäisi löytyä $n_0 \in \mathbb{N}$, jolla

$$|f_n(x) - 0| = \max\{0, x - n\} < \epsilon, \text{ kun } n \geq n_0 \text{ ja } x \in \mathbb{R}.$$

Yllä oleva ehto ei kuitenkaan pidä paikkaansa kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nimittäin jos $\epsilon = 1/2$, niin valitsemalla $x = n + 1$ saadaan

$$\max\{0, x - n\} = 1 \geq \epsilon,$$

vaikka olisi $n \geq n_0$. Siis (f_n) ei suppene tasaisesti kohti nollakuvausta. Näin ollen (f_n) ei suppene tasaisesti.

(i) Tarkastellaan sitten diskreettiä metriikkaa d_{01}. Valitaan kuten aikaisemmin: olkoon n_0 on pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $n_0 \geq x$. Nyt

$$d_{01}(f_n(x), 0) = d_{01}(\max\{0, x - n\}, 0) = d_{01}(0, 0) < \epsilon$$

kaikilla $\epsilon > 0$. Siis (f_n) suppenee pisteittäin.

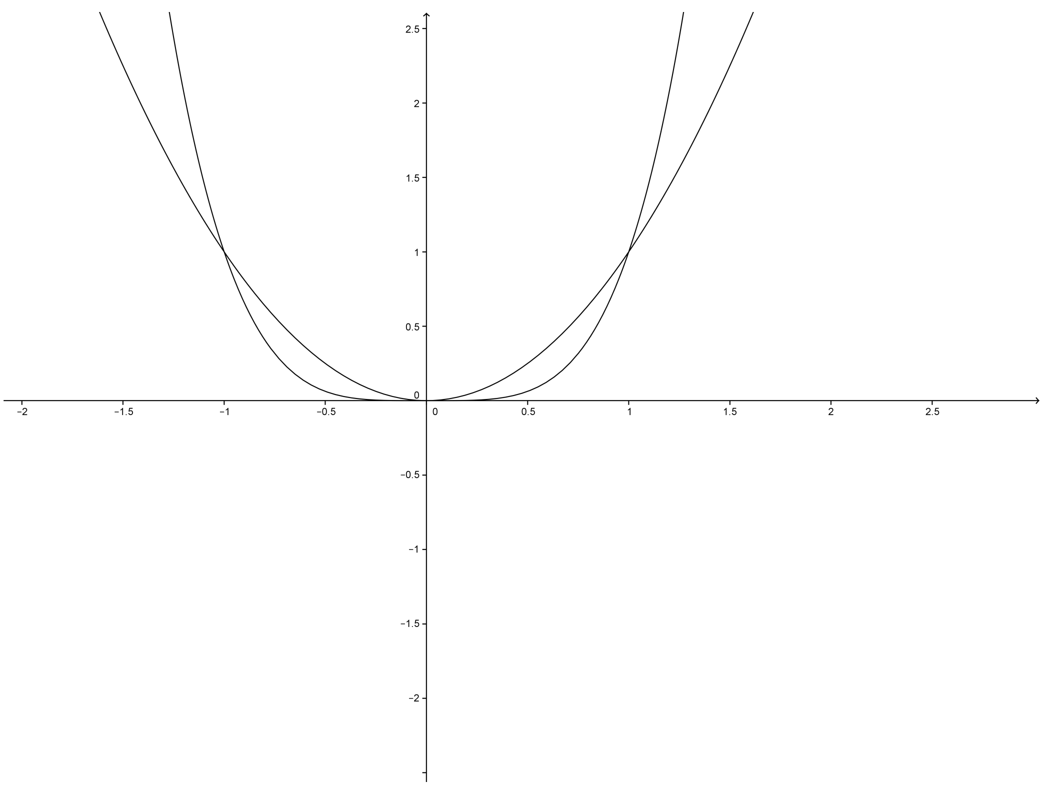
(ii) Olkoon taas $\epsilon = 1/2$ ja $x = n + 1$. Nyt

$$d_{01}(f_n(x), 0) = d_{01}(\max\{0, x - n\}, 0) = d_{01}(1, 0) = 1 \geq \epsilon.$$

Siis (f_n) ei suppene tasaisesti kohti nollakuvausta. Näin ollen (f_n) ei suppene tasaisesti.
On itse asiassa osoitettavissa, että edelliset tulokset pätevät mielivaltaiselle metriikalle e.

2. (11:14) Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seuraavasti: $f(x, y) = 1$, kun $x^4 < y < x^2$, ja $f(x, y) = 0$ muissa pisteissä (x, y). Näytä:
(i) $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ kaikilla origon lautta kulkevilla suorilla L,
(ii) raja-arvo $\lim_{z \to \bar{0}} f(z)$ ei ole olemassa.

Ratkaisu. (i) Mietitään aluksi, miten todistus voitaisiin tehdä. Piirretään kuvaajat x^2 ja x^4.



Olkoon A kuvaajien rajaaman joukon sisäpisteiden joukko. Joukon A pisteet ovat siis täsmälleen ne, jotka toteuttavat ehdon $x^4 < y < x^2$.
Tarkastellaan seuraavaksi kohdan 11.26. kuvauksen raja-arvon määritelmää. Olkoon V pisteen 0 ympäristö. Huomataan, että jos $1 \in V$, niin $f[L \cap U] \subset V$ millä tahansa origon ympäristöllä U. Pitää siis osoittaa, että $f[L \cap U] \subset \{0\}$ jollakin origon ympäristöllä U.

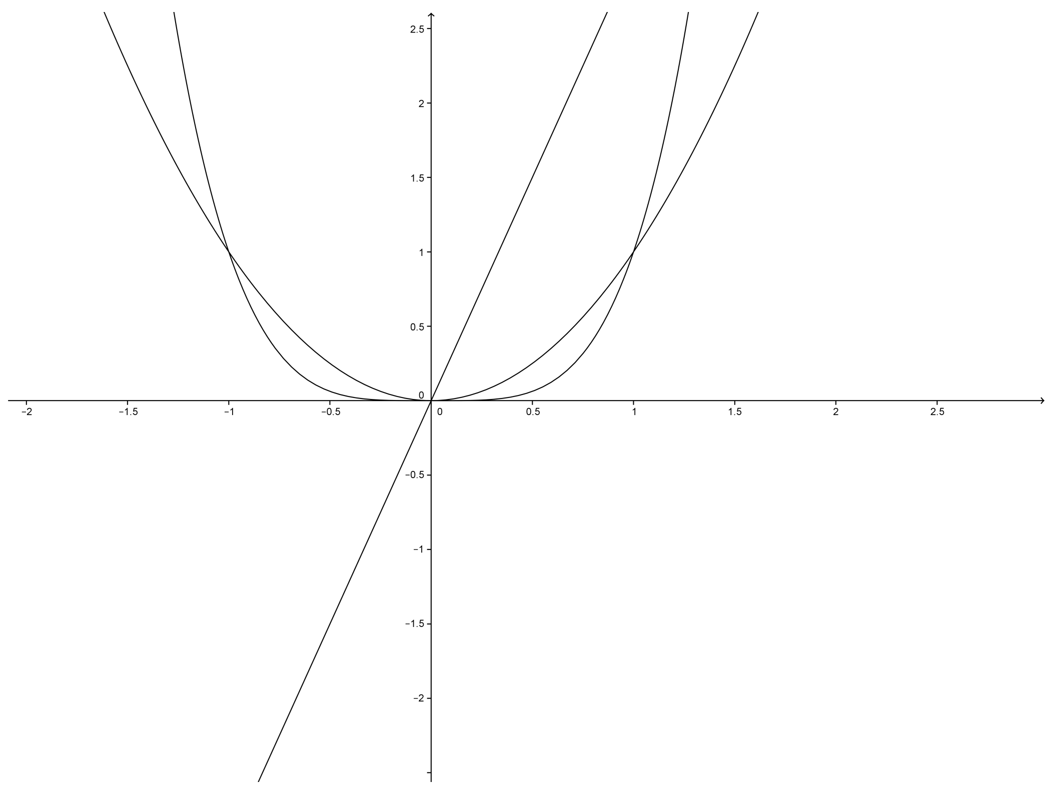
Aletaan tutkia erilaisia suoria. Jos

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

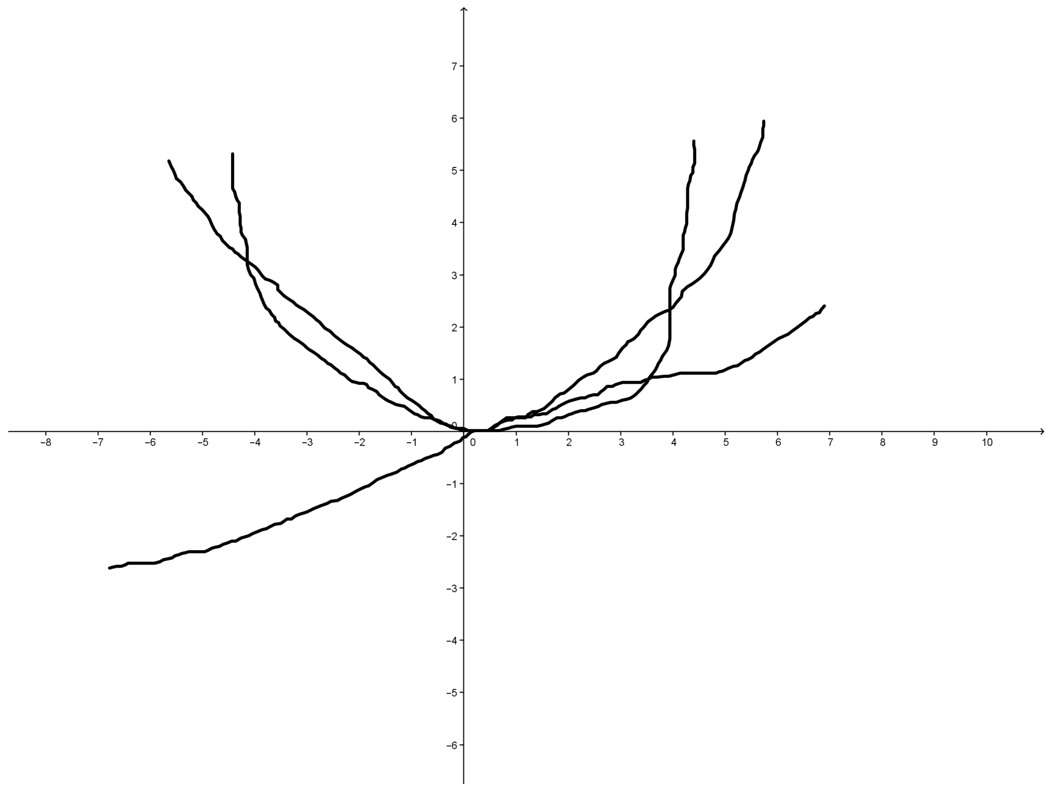
tai

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\},$$

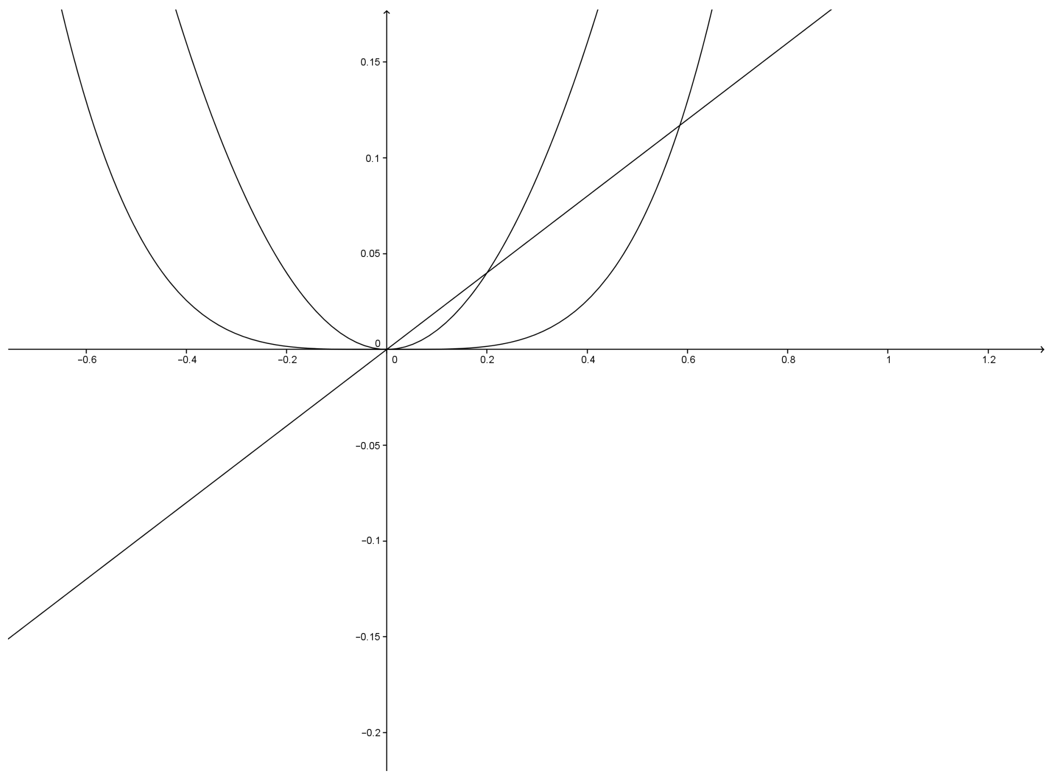
niin kyseiset suorat eivät selvästikään leikkaa joukkoa A. Samoin $L \cap A = \emptyset$, jos L on yhtälön $y = kx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ määräävä suora, jolle $|k| \geq 1$, kuten seuraavasta kuvasta käy ilmi.



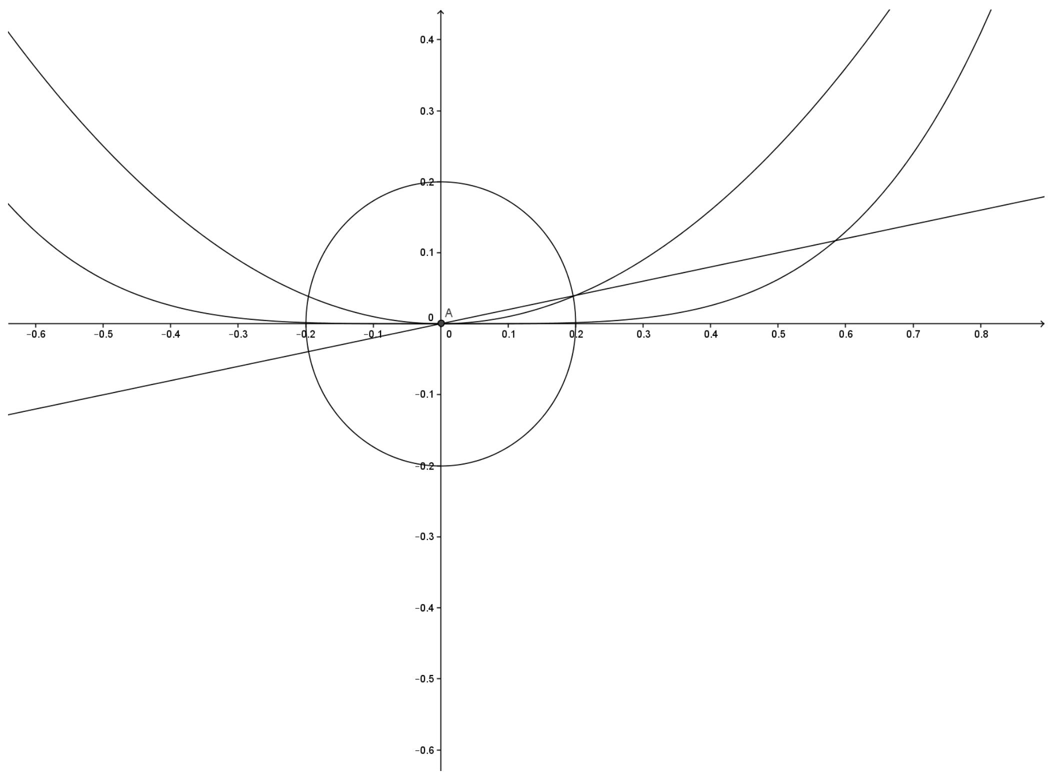
Mahdollisiksi ongelmatapaukseksi muodostuvat siis sellaiset suorat, jotka leikkaavat joukkoa A. Jos tällaisesta tapauksesta piirtää vapaalla kädellä pehmeähköä lyijyä käyttäen kuvan vihkoon, tilanne näyttää huolestuttavalta, kuten seuraavasta kuvasta käy ilmi.



Siirrytään käyttämään hiukan tarkempia piirustusvälineitä ja lähennetään sekä skaalataan kuvaa jonkin verran. Kuten seuraavasta kuvasta käy ilmi, origon läheisyydessä käykin hyvin.



Tästä saadaan idea: valitaan origon ympäristöksi kuula $B((0,0),r)$, jossa säde on korkeintaan suoran $y = kx$ ja kuvaajan x^2 leikkauspisteen (k, k^2) etäisyys origosta. Huomataan, että valitsemalla $r = |k|$ tilanne näyttää hyvältä, kuten seuraavasta kuvasta käy ilmi.



Olkoon sitten $r = \min\{1, |k|\}$ ja V pisteen 0 jokin ympäristö. Nyt pätee $f[L \cap B((0,0), r)] \subset V$. Siis kuvauksella f on pisteessä $(0,0)$ raja-arvo 0 pitkin mitä tahansa suoraa L.

(ii) Lauseen 11.28. nojalla riittää näyttää, että f ei ole jatkuva origossa. Tämän osoittamiseksi valitaan perinteisesti $\epsilon = 1/2$, ja olkoon lisäksi $x_n = (1/n, 1/n^3), n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Selvästikin $x_n \to (0,0)$ kun $n \to \infty$. Siispä kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, jolla $|x_n - (0,0)| < \delta$, kun $n \geq n_0$. Tämä tarkoittaa sitä, että olipa $\delta > 0$ mikä tahansa, niin

$$|f(x_n) - 0| = 1 \geq \epsilon,$$

vaikka $|x_n - (0,0)| < \delta$ riittävän suurilla n:n arvoilla. Siispä f ei ole jatkuva origossa. Siispä kysyttyä raja-arvoa ei ole olemassa.

3. (12:1) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $(x_n) \subset X$ jono. Näytä: (x_n) on X:n Cauchy-jono jos ja vain jos läpimitta $d(A_n) \to 0$ kun $n \to \infty$, missä $A_n = \{x_j : j \geq n\}$, kun $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. Oletetaan, että (x_n) on cauchy, ja olkoon $\epsilon > 0$. Koska (x_n) on cauchy, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, jolla $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$, kun $n, m \geq n_0$. Pitää osoittaa: on olemassa $n_x \in \mathbb{N}$, jolla $d(A_n) < \epsilon$, kun $n \geq n_x$. Valitaan $n_x = n_0$ ja huomataan, että arvoilla $n \geq n_x$ pätee

$$d(A_n) \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Siis $d(A_n) \to 0,$ kun $n \to \infty$.
Oletetaan seuraavaksi, että $d(A_n) \to 0,$ kun $n \to \infty$, ja olkoon $\epsilon > 0$. Nyt on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, jolla $d(A_n) < \epsilon/2$, kun $n \geq n_0$. Olkoon sitten x_n ja x_m mielivaltaisia jonon jäseniä, joille pätee $n, m \geq n_0$. Nyt

$$d(x_n, x_m) < d(A_{n_0}) \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Siis (x_n) on cauchy.

4. (12:11) Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $f : X \to Y$ bilipschitz-kuvaus. Näytä, että kuva $f(X)$ on täydellinen.

Ratkaisu. Koska f on bilipschitz, on olemassa $M \geq 1$, jolla

$$\frac{d(x,y)}{M} \leq d'(f(x), f(y)) \leq Md(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$.
Olkoon jono $(f(x_n))$ cauchy ja olkoon $\epsilon > 0$. Koska $(f(x_n))$ on cauchy, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, jolla $d'(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon/M$ kaikilla $n, m \geq n_0$. Nyt

$$d(x_n, x_m) \leq Md'(f(x_n), f(x_m)) < M * (\epsilon/M) = \epsilon.$$

Siispä jono (x_n) on cauchy. Koska X on täydellinen, jono (x_n) suppenee jotakin pistettä $a \in X$ kohti. Koska f on bilipschitz, se on jatkuva, jolloin lauseen 11.8. nojalla $f(x_n) \to f(a)$, kun $n \to \infty$. Siis valitsemamme mielivaltainen cauchyjono $(f(x_n))$ suppenee. Siis $f[X]$ on täydellinen.

5. (oleellisesti 12:13) Haetaan yhtälön $x^3 - 7x + 1 = 0$ juuren likiarvo välillä $[0, 1]$ soveltamalla Banachin kiintopistelausetta funktioon $f(x) = (x^3 + 1)/7$. Totea, että f toteuttaa lauseen oletukset välillä $[0, 1]$. Kuinka suuri n tarvitaan jotta kiintopistelauseen virhearvion $d(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$ perusteella

(arvio johdettu luennoilla) virhe on $< \frac{1}{100}$?

Ratkaisu. Todetaan aluksi, että Banachin kiintopistelauseen ehdot ovat voimassa. Aluksi on hyvä tarkistaa, että funktion f arvot todella ovat joukossa $[0,1]$. Tätä varten riittää laskea funktion f arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä: $f(0) = 1/7$ ja $f(1) = 2/7$. Lauseen 12.6. nojalla $[0,1]$ on täydellinen. Osoitetaan, että f on kontraktio. Väliarvolauseen nojalla kaikilla $x, y \in [0,1]$ on olemassa ξ_{xy}, jolla

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi_{xy})||x - y| \leq 3/7|x - y|.$$

Siis f on kontraktio ja $q = 3/7$. Näin ollen kiintopistelauseen ehdot ovat voimassa. Olkoon sitten $x_0 = 1$. Tällöin $x_1 = (1^3 + 1)/7 = 2/7$, joten $d(x_0, x_1) = 5/7$. Ratkaistaan n epäyhtälöstä

$$\frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) < \frac{1}{100},$$

jolloin saadaan

$$n > \frac{\ln 4/500}{\ln 3/7} (\approx 5,7).$$

Näin ollen esimerkiksi 8 on riittävä n:n arvo.

6. (12:14) Olkoon $(E, |\cdot|)$ täydellinen normiavaruus ja $f : E \to E$ kontraktio vakiolla $0 \leq q < 1$, eli $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ kaikilla $x, y \in E$. Asetetaan $F(x) = x + f(x)$, kun $x \in E$. Näytä, että F on homeomorfismi $E \to E$, joka on myös bilipschitz kuvaus.
Vihje: tarkista että

$$(1-q)|u - v| \leq |F(u) - F(v)| \leq (1+q)|u - v|, \quad u, v \in E.$$

Olkoon $y \in E$ mielivaltainen ja $g_y(x) = y - f(x)$ kun $x \in E$. Näytä Banachin kiintopisteen avulla, että kuvauksella g_y on yksikäsitteinen kiintopiste $x = G(y)$ kun $y \in E$. Päättele, että F on surjektio $E \to E$ ja että $G = F^{-1}$.

Ratkaisu. Osoitetaan ensiksi vihjeen väite. Olkoon siis $u, v \in E$. Nyt

$$(1-q)|u - v| = |(1-q)|u - v|| = ||u - v| - q|u - v|| \tag{1}$$
$$\leq ||u - v| - |f(u) - f(v)|| \leq |u - v + f(u) - f(v)| \tag{2}$$
$$= |F(u) - F(v)| \tag{3}$$

ja

$$|F(u) - F(v)| = |u + f(x) - v - f(v)| \leq |u - v| + |f(u) - f(v)| \tag{4}$$
$$\leq |u - v| + q|u - v| = (1 + q)|u - v| \leq \frac{1}{1 - q}|u - v|. \tag{5}$$

Edellinen osoittaa, että F on $1/(1-q)$-bilipschitz.
Näytetään seuraavaksi, että tehtävänannossa määritelty kuvaus g_y täyttää kiintopistelauseen ehdot. Oletuksen nojalla avaruus E on täydellinen. Avaruus E on myös epätyhjä, koska normiavaruudessa on origo, ja lisäksi kaikilla $y \in E$ pätee:

$$|g_y(u) - g_y(v)| = |y - f(u) - y + f(v)| = |f(u) - f(v)| \leq q|u - v|$$

kaikilla $u, v \in E$. Näin ollen kuvaukset g_y ovat kontraktioita, ja jokaisella kuvauksella g_y on siis olemassa yksikäsitteinen kiintopiste $G(y)$, jolle pätee $G(y) = g_y(G(y)) = y - f(G(y))$, jolloin

$$F(G(y)) = G(y) + f(G(y)) = y,$$

joten $F \circ G = id$, kun määritellään G kuvaukseksi $E \to E$.
Seuraavaksi todetaan, että $G(F(y))$ on kuvauksen $g_{F(y)}$ kiintopiste. Toisaalta

$$g_{F(y)}(y) = F(y) - f(y) = y,$$

joten myös y on kuvauksen $g_{F(y)}$ kiintopiste. Tässä kohtaa on muistettava, että kiintopistelause sanoo kiintopisteen olevan yksikäsitteinen. On siis oltava $G(F(y)) = y$ kaikilla $y \in E$. Näin ollen $G \circ F = id$. Siis F on bijektio. On vielä todettava, että kuvaus G on jatkuva. Tämä on kuitenkin selvää, koska G on itse asiassa M-Lipschitz: jos d on avaruuden E normin määräämä metriikka, niin

$$d(G(y_1), G(y_2)) \leq Md(F(G(y_1)), F(G(y_2))) = Md(y_1, y_2).$$

Huomaa, että edellä oleva seurasi siitä, että F on M-bilipschitz!