Topologia I
Harjoitus 10
Viikko 16 (15.4.-19.4. 2013)

1. (11:10) Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ kun $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiojono (f_n) $\mathbb{R}$:ssä (i) pisteittäin, (ii) tasaisesti. Tutki samat asiat myös, kun $\mathbb{R}$:ssä on diskreetti $\{0, 1\}$-metriikka.

2. (11:14) Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seuraavasti: $f(x, y) = 1$, kun $x^4 < y < x^2$, ja $f(x, y) = 0$ muissa pisteissä (x, y). Näytä:
(i) $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ kaikilla origon lautta kulkevilla suorilla L,
(ii) raja-arvo $\lim_{z \to \bar{0}} f(z)$ ei ole olemassa.

3. (12:1) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $(x_n) \subset X$ jono. Näytä: (x_n) on X:n Cauchy-jono jos ja vain jos läpimitta $d(A_n) \to 0$ kun $n \to \infty$, missä $A_n = \{x_j : j \geq n\}$, kun $n \in \mathbb{N}$.

4. (12:11) Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $f : X \to Y$ bilipschitz-kuvaus. Näytä, että kuva $f(X)$ on täydellinen.

5. (oleellisesti 12:13) Haetaan yhtälön $x^3 - 7x + 1 = 0$ juuren likiarvo välillä $[0, 1]$ soveltamalla Banachin kiintopistelausetta funktioon $f(x) = (x^3 + 1)/7$. Totea, että f toteuttaa lauseen oletukset välillä $[0, 1]$. Kuinka suuri n tarvitaan jotta kiintopistelauseen virhearvion $d(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$ perusteella (arvio johdettu luennoilla) virhe on $< \frac{1}{100}$?

6. (12:14) Olkoon $(E, |\cdot|)$ täydellinen normiavaruus ja $f : E \to E$ kontraktio vakiolla $0 \leq q < 1$, eli $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ kaikilla $x, y \in E$. Asetetaan $F(x) = x + f(x)$, kun $x \in E$. Näytä, että F on homeomorfismi $E \to E$, joka on myös bilipschitz kuvaus.
Vihje: tarkista että

$$(1 - q)|u - v| \leq |F(u) - F(v)| \leq (1 + q)|u - v|, \quad u, v \in E.$$

Olkoon $y \in E$ mielivaltainen ja $g_y(x) = y - f(x)$ kun $x \in E$. Näytä Banachin kiintopisteen avulla, että kuvauksella g_y on yksikäsitteinen kiintopiste $x = G(y)$ kun $y \in E$. Päättele, että F on surjektio $E \to E$ ja että $G = F^{-1}$.

Muistutus: 2. kurssikoe on tiistaina 7.5. klo 13-15. Ilmoita luennoijalle sähköpostitse jos kyseinen aika ei sovi esteen takia (vaihtoehtoinen koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).