Topologia I
Harjoitus 1
Viikko 4 (21.1.-25.1. 2013)

1. Olkoon $x = (1, 0, -1)$, $y = (0, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$. Laske sisätulo $x \cdot y$ ja euklidiset normit $|x|_2$, $|y|_2$, $|x+y|_2$ ja $|x-y|_2$, sekä normien tulo $|x|_2 \cdot |y|_2$. (Tässä $x \cdot y$ on vektoriavaruuden $\mathbf{R}^3$ tavallinen sisätulo.)

2. (1:2) Perustele miksi kaava

$$x \cdot y = x_1 y_2 + x_2 y_1, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ei määrittele sisätuloa tasossa $\mathbb{R}^2$.

3. (1:2) Olkoon E sisätuloavaruus. Joukon $A \subset E$ *ortokomplementti* on

$$A^\perp = \{x \in E : x \cdot y = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Näytä, että $A^\perp$ on E:n vektorialiavaruus.

4. Selitä miksi

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[0,1],$$

on sisätulo vektoriavaruudessa $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ jatkuva välillä } [0,1]\}$. Voit tehtävässä olettaa että tarvittavat integraalin ominaisuudet tunnetaan lukion tai kurssin Analyysi II pohjalta.

5. (1:5) Tarkista, että

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

määrittelee normin avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

6. (1:6 osittain) (i) Osoita, että ns. *suunnikasyhtälö*

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

on voimassa kaikilla $x, y \in E$, kun E on sisätuloavaruus.

(ii) Näytä suunnikasyhtälön perusteella että $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_\infty)$ ei ole sisätuloavaruus kun $n \geq 2$ ja

$$|x|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Muistutus: kurssisivun luentopäiväkirjassa on lista luennoilla käsitellyistä aiheista. Suoritetuista laskuharjoitustehtävistä saa lisäpisteitä (skaala ilmoitetaan ensi viikolla).