Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

Erilliskoe 13.6.2013

Erilliskokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen yksipuoleinen muistilappu.

1. Olkoon $A = \{0, 1\}$ ja

$$A^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_j \in A \text{ kun } j = 1, \ldots, n\}$$

n-kertainen karteesinen tulo joukolle A, missä $n \geq 2$. Pisteiden $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ välinen Hamming-etäisyys on

$$d_H(x, y) = \#\{j : x_j \neq y_j\},$$

missä $\#B$ on joukon B alkioiden lukumäärä. Näytä, että d_H on metriikka joukossa A^n. Määritä suljettu kuula $\overline{B}(\overline{0}, 1)$ kun $\overline{0} = (0, \ldots, 0) \in A^n$.

2. (teoriatehtävä) Olkoon (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia.
(i) Määrittele jatkuva kuvaus $f : X \to Y$.
(ii) Todista alkukuvaehto jatkuvuudelle: kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva jos ja vain jos alkukuva $f^{-1}(V) \subset X$ on avoin jokaisella avoimella joukolla $V \subset Y$.

3. Olkoon $(E, |\cdot|)$ normiavaruus, $a \in E$ vektori ja $\lambda \neq 0$ reaalinen skalaari. Näytä, että kuvaus T, missä

$$T(x) = \lambda x + a, \quad x \in E,$$

on homeomorfismi $E \to E$.

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ suljettu ja rajoitettu joukko, kun avaruudessa $\mathbf{R}^n$ on euklidinen metriikka. Näytä, että on olemassa sellainen piste $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A$, että $x_1 \leq y_1$ jokaisella $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$.

5. Määrittele yhtenäinen metrinen avauruus X. Onko $(\mathbf{R}, d)$ yhtenäinen kun d on diskreetti $\{0, 1\}$-metriikka? Perustele!