Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

Erilliskoe 13.5.2013

Erilliskokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen yksipuoleinen muistilappu.

1. Määrittele metrisen avaruuden (X, d) *avoin* joukko ja *suljettu* joukko. Anna esimerkki sellaisista joukoista $A, B \subset \mathbb{R}$, että
   (i) A on sekä avoin että suljettu avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,
   (ii) B ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
Avaruudessa $\mathbb{R}$ on tavallinen metriikka, eli $d(s,t) = |s-t|$, kun $s, t \in \mathbb{R}$. Perustele!

2. Määritä sisäpisteiden joukko $int(A)$ ja reuna ∂A euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$, kun
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq x, x > 0\}.$$
Perusteluissa voit myös käyttää sopivia selittäviä kuvia.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kuvaus
$$f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Näytä, että f on homeomorfismi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kun avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on euklidinen metriikka.

4. (a) Määrittele *kompakti* metrinen avaruus X.
(b) Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus, $x_0 \in X$ kiinnitetty piste ja $f : X \to X$ sellainen jatkuva kuvaus, että $f(x) \neq x_0$ kaikilla $x \in X$. Näytä, että on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $d(x_0, f(x)) \geq c$ kaikilla $x \in X$. *Vihje:* tarkista ensin että $x \mapsto d(x_0, f(x))$ on jatkuva kuvaus $X \to \mathbf{R}$.

5. Määrittele *yhtenäinen* metrinen avaruus (X, d). Tutki, onko joukko
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}$$
yhtenäinen, kun joukossa A on tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan indusoima relatiivitopologia.