Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

Erilliskoe 14.11.2013

Erilliskokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen yksipuoleinen muistilappu.

1. Olkoon e lukusuoran $\mathbb{R}$ diskreetti $\{0,1\}$-metriikka. Näytä, että

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + e(x_2, y_2), \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

määrittelee metriikan d tasossa $\mathbb{R}^2$. Määritä avoin kuula $B(\overline{0}, 1)$ tässä metriikassa, kun $\overline{0} = (0,0)$.

2. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Määrittele joukon A *sisus* (eli sisäpisteiden joukko) ja *reuna* ∂A. Näytä, että A on avoin joukko jos ja vain jos

$$A \cap \partial A = \emptyset.$$

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus, ja

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

sen kuvaaja. Näytä, että metriset avaruudet $\mathbb{R}$ ja $G(f)$ ovat homeomorfiset. Lukusuoralla $\mathbb{R}$ on tavallinen matriikka ja avaruudessa $G(f)$ on tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan indusoima etäisyys.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu joukko. Näytä, että on olemassa sellainen piste $(a,b) \in A$, että

$$a + b \leq x + y$$

kaikilla $(x,y) \in A$. *Vihje:* jatkuvat kuvaukset kompakteissa joukoissa.

5. (i) Määrittele *yhtenäinen* metrinen avauruus (X,d).
(ii) Onko avaruus $(\mathbb{R}^2, e)$ yhtenäinen, kun e on tason diskreetti $\{0,1\}$-metriikka? Perustele.