Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

2. kurssikoe 7.5.2013

Kurssikokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen yksipuoleinen muistilappu.

1. (a) (*teoria*) Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Määrittele joukon A *reuna* ∂A.
(b) Olkoon $A = \{0\} \cup [1, 2[\subset \mathbb{R}$. Määritä ∂A kun lukusuoralla $\mathbb{R}$ on
(i) tavallinen etäisyys,
(ii) diskreetti $\{0, 1\}$-metriikka.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaus $f(x, y) = (x, y + x)$ kun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Näytä, että f on homeomorfismi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kun tasossa $\mathbb{R}^2$ on euklidinen metriikka.

3. (a) (*teoria*) Määrittele *Cauchy-jono* ja *täydellinen* metrinen avaruus (X, d).
(b) Olkoon (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ sellainen bijektio, että

$$C_1 d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_2 d(x, y), \quad \text{kaikilla } x, y \in X,$$

sopivilla vakioilla $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$. Näytä: jos (X, d) on täydellinen metrinen avaruus, niin myös (Y, d') on täydellinen.

4. (a) (*teoria*) Määrittele *kompakti* metrinen avaruus X.
(b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epä-tyhjä suljettu ja rajoitettu osajoukko, missä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on euklidinen metriikka $|\cdot|_2$. Näytä, että jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on olemassa lähin piste $a \in A$, toisin sanoen,

$$|x - a|_2 = d(x, A).$$

Muistutus: pisteen x etäisyys $d(x, A)$ joukosta A on

$$d(x, A) = \inf\{|x - b|_2 : b \in A\}.$$