Topologia I
2. kurssikoe
28.4. 2009

1. Määritä sisäpisteiden joukko $int(A)$ ja reuna ∂A kun

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}.$$

Perustele vastauksesi! Tasossa $\mathbb{R}^2$ on euklidinen etäisyys.

2. Olkoon $|\cdot|_2$ euklidinen normi tasossa $\mathbb{R}^2$ ja

$$B(\overline{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

vastaava avoin kuula. Määritellään kuvaukset $f : B(\overline{0}, 1) \to \mathbb{R}^2$ sekä $g : \mathbb{R}^2 \to B(\overline{0}, 1)$ asettamalla

$$f(u) = \frac{u}{1 - |u|_2}, \quad g(v) = \frac{v}{1 + |v|_2},$$

kun $u \in B(\overline{0}, 1)$ ja $v \in \mathbb{R}^2$. Näytä, että f on homeomorfismi $B(\overline{0}, 1) \to \mathbb{R}^2$. *Vihje:* kannattaa ensin todeta, että $g = f^{-1}$ laskemalla $f \circ g$ ja $g \circ f$.

3. (*teoriatehtävä*) (a) Määrittele *kompakti* metrinen avaruus X.
(b) Näytä: jos X on kompakti metrinen avaruus, Y metrinen avaruus sekä $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus, niin kuvajoukko fX on kompakti.

4. Olkoon

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

Tutki, onko joukko A (a) kompakti, (b) täydellinen. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on euklidinen etäisyys.