Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Kurssikoe 4.5.2010

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määritä euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukon

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y \leq 1 - x^2\}$$

sisäpisteiden joukko $int(A)$ ja reuna ∂A. Oikea vastaus riittää! Kannattaa piirtää kuva.

2. (a) Olkoon kuvaus $f: X \to Y$ jatkuva, ja olkoon (x_n) jono X:ssä. Osoita, että jos jono (x_n) suppenee, niin sen kuvien jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee Y:ssä.

(b) Olkoon $f: X \to Y$ peräti homeomorfismi. Osoita, että jos kuvien jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee, niin jono (x_n) suppenee X:ssä.

3. (a) Määrittele metrisen avaruuden (X,d) yhtenäisyys. Lisäksi, olkoon $A \subset X$. Kuinka joukon A yhtenäisyys käsitteenä palautuu edellä määrittelemääsi avaruuden yhtenäisyyteen?

(b) Osoita seuraava: Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Jos on olemassa sellainen $A \subset X$, että $\emptyset \neq A \neq X$ ja $\partial A = \emptyset$, ts. A:n reuna on tyhjä, niin avaruus X on epäyhtenäinen.

4. Todista kurssin lause: Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Olkoot A ja B sen erillisiä ja epätyhjiä osajoukkoja, A kompakti ja B suljettu. Tällöin $d(A,B) > 0$. Saa käyttää läheisesti asiaan liittyviä lauseita.

Ohje. Jos mokomaa tarvitsee, voi pitää tunnettuna että

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A, y \in B\} = \inf\{d(x,B) \mid x \in A\}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe 3.5.2011

Huom.1. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

Huom.2. Sanomattakin on selvää, että kaikkia luennoilla tai oppikirjassa esitettyjä lauseita saa käyttää, niitä uudestaan todistamatta.

1. Olkoon A avaruuden X osajoukko, joka on sekä avoin että suljettu X:ssä yhtä aikaa. Osoita, että tällöin pätee $\partial A = \emptyset$, siis sen reuna on tyhjä.

2. Tarkastellaan kuvausta $f : [-1,1] \to [-2,2]$, $f(x) = x^3 + x$, kun $x \in [-1,1]$. Pidetään tunnettuna, että se on bijektio. Onko se homeomorfismi? Perustelut.

3. (a) Määrittele (lyhyesti) metrisen avaruuden (X,d) täydellisyys.

Tarkastellaan lisäksi kuvausta $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,x^2 - y)$, ja sen kuvajoukkoa $A = f\mathbf{R}^2$. Osoita, että avaruus (joukko) A on

(b) yhtenäinen, (c) täydellinen.

Ohje. Kohdassa (c) esitä A uudella tapaa.

4. Olkoot A ja B euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^n$ epätyhjiä osajoukkoja, A kompakti ja B suljettu $\mathbf{R}^n$:ssä. Osoita, että löytyy sellaiset pisteet $a \in A$ ja $b \in B$, että $d(a,b) = d(A,B)$ (jossa d on euklidinen metriikka).

Ohje. Mitkä ovat $\mathbf{R}^n$:n kompaktit osajoukot?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe 9.5.2012

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määrittele lyhyesti metrisen avaruuden täydellisyys.

2. Tarkastellaan avaruuden $\mathbf{R}^3$ osajoukkoa $A = \{(s, s^2 - t, t) \in \mathbf{R}^3 \mid s, t \in \mathbf{R}\}$. Anna jokin homeomorfismi $f : \mathbf{R}^2 \to A$ ja perustele se todella homeomorfismiksi. Kun nyt tuommoinen homeomorfismi on, onko A kompakti tai yhtenäinen?

3. Olkoon A avaruuden X osajoukko, jolla $\partial A = \emptyset$, siis sen reuna on tyhjä.

(a) Osoita että tällöin A on yhtä aikaa sekä avoin että suljettu avaruudessa X.

(b) Voiko tällöin olla olemassa sellaista polkua $\alpha : [0,1] \to X$, että $\alpha(0) \in A$ ja $\alpha(1) \in X \setminus A$? Perustelu.

4. Olkoon $A = [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \in [0,1]\}$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Osoita että funktio $F : [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt \quad \text{kun } x \in [0,1],$$

on jatkuva. Onko se tasaisesti jatkuva välillä $[0,1]$?

Huom. Integraalit ovat jatkuvuuden perusteella olemassa.