



1. Asetetaan  $\mathbb{R}$ :n osajoukot  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 3]$  ja  $C = B \setminus \{2\}$ . Tutki, ovatko
  - (a)  $A$  ja  $B$  homeomorfiset,
  - (b)  $A$  ja  $C$  homeomorfiset.
  
2. Tutki, onko joukko
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 1\}$$
  - (a) kompakti,
  - (b) täydellinen.
  
3. Olkoon  $C$  metrisen avaruuden  $(X, d)$  komponentti ja  $a \in X$ . Osoita, että jos  $(x_n)$  on sellainen  $X$ :n jono, että  $x_n \rightarrow a$  ja  $x_n \notin C$  vain äärellisen monella indeksillä  $n \in \mathbb{N}$ , niin  $a \in C$ .
  
4. Olkoot  $(X, d)$  ja  $(Y, d')$  metrisiä avaruuksia ja olkoon  $A \subset X$ .
  - (a) Esitä määritelmä kuvauksen  $f: A \rightarrow Y$  raja-arvolle pisteessä  $a \in \bar{A}$  pitkin joukkoa  $A$ .
  - (b) Osoita, että jos  $b = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ , niin  $b \in \bar{fA}$ .

Vastaa kurssikyselyyn

<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/>

heti tentin jälkeen!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

2. kurssikoe

3.5.2007 klo 13-15

1. Miten määritellään joukon  $A \subset X$  reuna  $\partial A$ ? Jos  $X = \mathbf{R}$  ja  $A = \{0\}$ , niin määritä  $\partial A$ .
2. Mitä tarkoitetaan kontraktiolla  $f : X \rightarrow Y$ ? Anna esimerkit sellaisista kuvauksista  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , että (a)  $f$  on kontraktio ja (b)  $f$  ei ole kontraktio.
3. Olkoon  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ . Osoita  $f$  on jatkuva silloin ja vain silloin kun  $f$ :n graafi  $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$  on  $\mathbf{R}^2$ :n kompakti osajoukko.
4. Mitä tarkoitetaan joukon  $E \subset X$  separaatiolla? Määritä joku rationaalilukujoukon  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$  separaatio.



1. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 7, y \geq 1 \} \subset \mathbb{R}^2.$$

Määritä joukon  $A$  sisus  $\text{int } A$ , reuna  $\partial A$ , sulkeuma  $\bar{A}$  ja ulkopisteiden joukko  $\text{ext } A$  tasossa  $\mathbb{R}^2$ .

2. Esitä esimerkki kahdesta homeomorfisesta metrisestä avaruudesta, joista toinen on rajoitettu ja toinen rajoittamaton.

3. a) Osoita, että kuvaus  $f: [\frac{3}{2}, 2] \rightarrow [\frac{3}{2}, 2]$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right),$$

on kutistus.

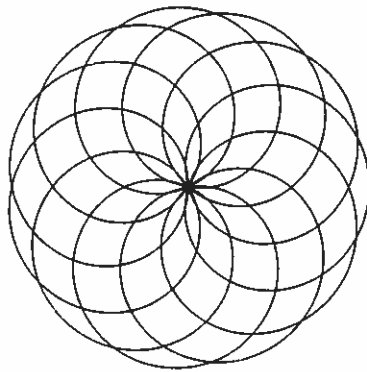
- b) Miksi  $[\frac{3}{2}, 2]$  on täydellinen?

c) Tarkastellaan lukujonoa  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , jolle  $x_0 = 2$  ja  $x_{n+1} = f(x_n)$  kaikilla  $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Osoita, että  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  on olemassa, ja määritä  $a$ .

4. Kuvauksen  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(t) = (\cos t + \cos 12t, \sin t + \sin 12t),$$

arvojoukko  $A = f[0, 2\pi]$  näkyy alla olevassa kuvassa. Onko  $A$  a) kompakti, b) yhtenäinen, c) avoin tasossa  $\mathbb{R}^2$ ?



[Kuvauksen  $f$  tarvittavat ominaisuudet riittää todeta. Tason yhtenäisyyden saa olettaa tunnetuksi.]