Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

1. kurssikoe 26.2.2013

Kurssikokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen yksipuoleinen muistilappu.

1. (*teoriatehtävä*) (i) Määrittele avoin joukko $A \subset X$ ja suljettu joukko $B \subset X$, kun (X, d) on metrinen avaruus.

(ii) Näytä, että avoin kuula $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ on X:n avoin joukko kaikilla $a \in X$ ja $r > 0$.

2. Olkoon

$$d(s, t) = \log(1 + |s - t|), \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Näytä, että d on metriikka joukossa $\mathbf{R}$.
Muistutus: logaritmifunktion $x \mapsto \log(x)$ perusominaisuudet saa olettaa tunnetuiksi kurssista Analyysi I. Arvio

$$\log(1 + u + v) \leq \log(1 + u) + \log(1 + v), \quad u \geq 0, v \geq 0,$$

saattaa olla hyödyllinen.

3. Olkoon

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y < z < x^2 + y^2\}.$$

Näytä, että A on avoin joukko avaruuden $\mathbf{R}^3$ euklidisessa metriikassa.

4. Olkoon $(E, |\cdot|)$ normiavaruus, ja $a, b \in E$ kiinnitettyjä vektoreita. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R} \to E$ asettamalla

$$f(t) = ta + (1 - t)b, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Näytä: (i) f on Lipschitz-kuvaus $\mathbf{R} \to E$, (ii) f on jatkuva joukossa $\mathbf{R}$.

Joukossa $\mathbf{R}$ on tavallinen metriikka, ja normiavaruudessa E on normin määräämä metriikka $d(u, v) = |u - v|$, kun $u, v \in E$.