Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Kurssikoe 2.3.2010

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja A sen epätyhjä osajoukko. Osoita, että joukko

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) > 0\}$$

on avoin X:ssä.

2. Määritellään $\mathbf{R}$:ssä pisteiden x ja y välimatka yhtälöllä

$$d(x, y) = \big||x| - |y|\big|, \quad \text{kun } x, y \in \mathbf{R}.$$

Mitkä metriikkapostulaateista (M1)-(M3) kuvaus d toteuttaa joukossa $\mathbf{R}$? Onko se metriikka siinä? Perustelu.

3. Olkoon $(E, \| * \|)$ normiavaruus, ja kiinnitetään kaksi sen pistettä $a, b \in E$. Tarkastellaan kuvausta $f : [0, 1] \to E$,

$$f(t) = (1 - t)\, a + t\, b, \quad \text{kun } t \in [0, 1],$$

jossa väli $[0, 1]$ on varustettu tavallisella euklidisella metriikalla d.
(a) Osoita että f on jatkuva.
(b) Osoita että se on peräti Lipschitz.

4. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoja

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ xy = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y = 0\}.$$

(a) Osoita, että joukko A on suljettu.
(b) Osoita, tavalla tai toisella, että A:lla ja B:llä on jotkin erilliset ympäristöt, ts. $\mathbf{R}^2$:n avoimet joukot U ja V, joilla $A \subset U$, $B \subset V$ ja $U \cap V = \emptyset$.
Ohje (b). Sopiva lause tai voit konstruoida A:n ja B:n väliin erottavan käyrän.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe 1.3.2011

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Tutki onko kuvaus

$$d(x,y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^2 - y_2^2|, \quad \text{jossa } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

metriikka joukossa $X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 > 0\}$.

2. (a) Osoita jatkuvaksi kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, jossa

$$f(x,y) = xy + e^y, \quad \text{kun } (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

(b) Pidetään tunnettuna, että kuvaus $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on muualla jatkuva paitsi pisteessä $\mathbf{0} = (0,0)$. Näillä tiedoilla, missä pisteissä kuvaus $h = (f,g) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ on jatkuva? Siis h:n komponentit ovat a-kohdan f ja g. Aivan lyhyt vastaus riittää.

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva kuvaus. Osoita että $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < f(x)\}$ on euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ avoin joukko.

4. Tarkastellaan rajoitettujen funktioden avaruutta $E = raj([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}, \quad \text{kun } f \in E,$$

sen osajoukkoa

$$A = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \text{ on jatkuva ja } f(1) = 1\}$$

ja sen vektoria, kuvausta $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, jolla

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

(a) Määrää joukon A läpimitta $d(A)$.

(b) Määrää etäisyys $d(g, A)$.

(c) Kuuluuko g joukon A sulkeumaan E:ssä?

Metriikka d on luonnollisesti normin $\| * \|_\infty$ määrittelemä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe 28.2.2012

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kuvaus (mielivaltainen). Osoita että sen kuvaaja

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$$

ei ole avoin joukko euklidisessa tasossa $\mathbf{R}^2$.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja A ja B sen epätyhjiä osajoukkoja, joilla $d(A, B) > 0$. Osoita että

$$d(x, A) + d(x, B) > 0 \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

3. Olkoon $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y > 1\}$ (puolitaso) varustettu euklidisella metriikalla. Määrää sen osajoukon $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y - x/2 > 1\}$ sulkeuma $cl_X A$ avaruudessa X. Perustelut.

4. Tarkastellaan rajoitettujen funktioiden $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ avaruutta $E = raj([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ ja sen osajoukkoa

$$A = \{f \in E \mid f(x) \geq x \text{ kaikilla } x \in [0, 1]\}.$$

(a) Kiinnitetään $x \in [0, 1]$. Osoita että sitä vastaava kuvaus

$$\psi_x : E \to \mathbf{R}, \quad f \mapsto f(x) - x,$$

on jatkuva.

(b) Osoita että joukko A on suljettu avaruudessa E.

(c) Osoita että se ei ole avoin E:ssä.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ensimmäinen välikoe 19.10.2011

Kaikissa tehtävissä (X, d) on metrinen avaruus.

1. Miten määritellään avoin joukko? Osoita käyttämällä vain esittämääsi määritelmää, että jos joukot A_i ovat avoimia jokaisella $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} A_i$ on avoin ja jos I on äärellinen, niin myös $\bigcap_{i \in I} A_i$ on avoin.

2. Olkoon $A \subset X$ epätyhjä. Osoita, että $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

3. Näytä, että ellipsoidin pinta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\}$ on suljettu Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko ja että sen sisus $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + z^2 < 1\}$ on avoin joukko.

4. Olkoon $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $Y = \mathbb{R}$ molemmissa Euklidinen metriikka. Olkoon $f: X \to Y$ funktio
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
Onko tämä funktio (a) jatkuva? (b) Lipschitz? (Todista.)