



1. Olkoon $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, kun $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että d on metriikka tasossa \mathbb{R}^2 . Määritä tässä metriikassa pallo $S_d((1, 1), 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, (1, 1)) = 1\}$.
2. Tutki, onko joukko $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\} \subset \mathbb{R}^2$ suljettu. Entä onko A avoin? Määritä A :n kasautumispisteet. Tarkat perustelut!
3. Olkoon $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ ja } |y| \leq 1\}$. Määritä X :n osajoukon $A = \{(x, y) \in X : 0 < x \leq 1 \text{ ja } 0 < y \leq 1\}$ sisäpisteet, reuna ja sulkeuma avaruudessa X . Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa tarkkaa perustelua, mutta jokin selvitys, joka voi perustua kuvaan, tulee antaa.
4. (a) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Esitä *Lipschitz-kuvauksen* $f: X \rightarrow Y$ määritelmä.
(b) Olkoon E sisätuloavaruus ja $a \in E$. Osoita, että yhtälön $f(x) = x \cdot a$ määrittelemä kuvaus $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ on Lipschitz.

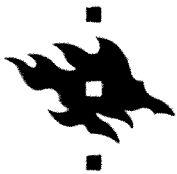
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

1. kurssikoe

27.2.2007 klo 13-15

1. Olkoon X metrinen avaruus ja $x \in X$. Näytä, että $X \setminus \{x\}$ on avoin.
2. Olkoon $C[0, 1]$ välillä $[0, 1]$ määriteltyjen jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden muodostama normiavaruus normina $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$. Näytä, että seuraavat kuvaukset ovat jatkuvia:
 - (a) $\alpha : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $\alpha(f) = f(0)$.
 - (b) $\beta : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $\beta(f)(x) = xf(x)$, $x \in [0, 1]$.
3. Miten määritellään metrisen avaruuden osajoukon A sulkeuma \overline{A} ? Todista, että kaikille $A, B \subset X$ pätee $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. *Huom. tentissä 3 virheellinen! vrt. Väisälä, 6.8.19) ja 6.9*
4. Miten määritellään metriikka joukossa X ? Olkoon $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ kuvaus, joka toteuttaa ehdot $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ja $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in X$. Näytä, että kuvausta d voidaan käyttää metriikan määrittelyyn X :ssä.



1. Olkoon E sisätuloavaruus. Sisätuloavaruuden tuntemiseksi riittää tietää vektoriavaruuden rakenteen lisäksi yksi seuraavista: sisätulo, normi tai metriikka. Selitä kussakin tapauksessa, miten kaksi muuta määritetään, kun yksi näistä tunnetaan. (Selitykseksi tarvitaan siis esimerkiksi 6 kaavaa ja niihin liittyvät lyhyet selvitykset).

2. Merkitään

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, x^2 + y^2 \geq 1 \}.$$

Onko A tason \mathbb{R}^2 avoin osajoukko?

3. a) Olkoon E epätriviaali normiavaruus, ts. $E \neq \{\bar{0}\}$, ja $r \geq 0$. Osoita, että E :ssä on pisteet a ja b , joiden etäisyys toisistaan on r .

b) Esitä esimerkki metrisestä avaruudesta (X, d) , jonka metriikka ei voi olla joukon X minkään normin määräämä.

4. Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x + e^y z,$$

on jatkuva, kun eksponenttifunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, jatkuvuus oletetaan tunnetuksi. Onko f Lipschitz-kuvaus?