HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe, 28.2.2006 klo 13–15

1. Olkoon $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, kun $x = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2$ ja $y = (y_1, y_2) \in \mathsf{R}^2$. Osoita, että d on metriikka tasossa R^2. Määritä tässä metriikassa pallo $S_d((1,1),1) = \{x \in \mathsf{R}^2 : d(x,(1,1)) = 1\}$.

2. Tutki, onko joukko $A = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : y \neq x\} \subset \mathsf{R}^2$ suljettu. Entä onko A avoin? Määritä A:n kasautumispisteet. Tarkat perustelut!

3. Olkoon $X = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ ja } |y| \leq 1\}$. Määritä X:n osajoukon $A = \{(x,y) \in X : 0 < x \leq 1 \text{ ja } 0 < y \leq 1\}$ sisäpisteet, reuna ja sulkeuma avaruudessa X. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa tarkkaa perustelua, mutta jokin selvitys, joka voi perustua kuvaan, tulee antaa.

4. (a) Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia. Esitä *Lipschitz-kuvauksen* $f\colon X \to Y$ määritelmä.
   (b) Olkoon E sisätuloavaruus ja $a \in E$. Osoita, että yhtälön $f(x) = x \cdot a$ määrittelemä kuvaus $f\colon E \to \mathsf{R}$ on Lipschitz.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe
27.2.2007 klo 13-15

1. Olkoon X metrinen avaruus ja $x \in X$. Näytä, että $X \setminus \{x\}$ on avoin.

2. Olkoon $C[0,1]$ välillä $[0,1]$ määriteltyjen jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden muodostama normiavaruus normina $\| f \| = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Näytä, että seuraavat kuvaukset ovat jatkuvia:
(*a*) $\alpha : C[0,1] \to \mathbf{R}$, $\alpha(f) = f(0)$.
(*b*) $\beta : C[0,1] \to C[0,1]$, $\beta(f)(x) = xf(x)$, $x \in [0,1]$.

3. Miten määritellään metrisen avaruuden osajoukon A sulkeuma $\overline{A}$? Todista, että kaikille $A, B \subset X$ pätee $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Huom tehtävä 3 virheellinen !!
vrt. Väisälä, 6.8.(9) ja 6.9

4. Miten määritellään metriikka joukossa X? Olkoon $d : X \times X \to \mathbf{R}$ kuvaus, joka toteuttaa ehdot $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ja $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$. Näytä, että kuvausta d voidaan käyttää metriikan määrittelyyn X:ssä.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe, 26. 2. 2008

1. Olkoon E sisätuloavaruus. Sisätuloavaruuden tuntemiseksi riittää tietää vektoriavaruuden rakenteen lisäksi yksi seuraavista: sisätulo, normi tai metriikka. Selitä kussakin tapauksessa, miten kaksi muuta määritetään, kun yksi näistä tunnetaan. (Selitykseksi tarvitaan siis esimerkiksi 6 kaavaa ja niihin liittyvät lyhyet selvitykset).

2. Merkitään
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ x^2 + y^2 \geq 1 \}.$$
Onko A tason $\mathbb{R}^2$ avoin osajoukko?

3. a) Olkoon E epätriviaali normiavaruus, ts. $E \neq \{\bar{0}\}$, ja $r \geq 0$. Osoita, että E:ssä on pisteet a ja b, joiden etäisyys toisistaan on r.
b) Esitä esimerkki metrisestä avaruudesta (X,d), jonka metriikka ei voi olla joukon X minkään normin määräämä.

4. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = x + e^y z,$$
on jatkuva, kun eksponenttifunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$, jatkuvuus oletetaan tunnetuksi. Onko f Lipschitz-kuvaus?