Topologia I
1. kurssikoe
24.2. 2009

1. Tutki, onko kuvaus

$$d(x,y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^3 - y_2^3|,$$

missä $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $\emptyset \neq A \subset X$ osajoukko ja $r > 0$. Näytä: jos joukon A läpimitta on $d(A) \leq r$ ja $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ jollakin $x \in X$, niin $A \subset B(x, 2r)$. (Edellä $B(x, s) = \{y \in X : d(y, x) < s\}$ on avoin s-säteinen kuula.)

3. (*teoria*) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ kuvaus.
(i) Määrittele kuvauksen f jatkuvuus pisteessä $a \in X$.
(ii) Olkoon $d'(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$, missä $M > 0$ on vakio. Näytä, että f on jatkuva X:ssä.

4. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 3\}$. Näytä, että A ja B ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljettuja osajoukkoja, ja laske joukkojen välinen etäisyys $d(A, B)$ euklidisen metriikan d suhteen.