Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Topologia I

1. kurssikoe 26.2.2013

Malliratkaisut ja tehtävien tarkastamiset

Tehtävät 1 ja 2 Henrik Wirzenius

Tehtävät 3 ja 4 Teemu Saksala

Jos sinulla on kysyttävää vastauksiisi liittyen, niin käänny sähköpostilla kyseisen tehtävän korjaajan puoleen.

1. (*teoriatehtävä*) (i) Määrittele avoin joukko $A \subset X$ ja suljettu joukko $B \subset X$, kun (X, d) on metrinen avaruus.

(ii) Näytä, että avoin kuula $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ on X:n avoin joukko kaikilla $a \in X$ ja $r > 0$.

Ratkaisu: (i) Joukko $A \subset X$ on avoin jos kaikilla $x \in A$ on olemassa $r > 0$ siten että $B(x, r) \subset A$. Joukko $B \subset X$ on suljettu jos komplementti B^c on avoin.

(ii) Olkoon $a \in X$ ja $r > 0$. Olkoon $x \in B(a, r)$ jolloin $d(x, a) < r$. Merkitään $s = r - d(x, a)$ jolloin $s > 0$. Osoitetaan, että $B(x, s) \subset B(a, r)$. Olkoon $y \in B(x, s)$. Tällöin $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < s + d(x, a) = r - d(x, a) + d(x, a) = r$, joten $y \in B(a, r)$. Näin ollen $B(x, s) \subset B(a, r)$, josta seuraa, että $B(a, r)$ on X:n avoin joukko.

Pisteytys: (i) Avoimen joukon määritelmä oikein, 2p. Suljetun joukon määritelmä oikein, 1p. (ii) Oikein tehty päättely, 3p. Jos idea oikein mutta esim. säde ei tarpeeksi pieni (esimerkkinä $r/2$), 1p. Jos säde tarpeeksi pieni mutta päättelyssä virheitä, 1p.

2. Olkoon
$$d(s, t) = \log(1 + |s - t|), \quad s, t \in \mathbf{R}.$$
Näytä, että d on metriikka joukossa $\mathbf{R}$.

Muistutus: logaritmifunktion $x \mapsto \log(x)$ perusominaisuudet saa olettaa tunnetuiksi kurssista Analyysi I. Arvio

$$\log(1 + u + v) \leq \log(1 + u) + \log(1 + v), \quad u \geq 0, v \geq 0,$$

saattaa olla hyödyllinen.

Ratkaisu: Osoitetaan ensin tehtävänannossa annettu arvio (arviota sai myös käyttää ilman verifiointia): Olkoon $u, v \geq 0$. Tällöin $uv \geq 0$, joten

$$\log(1+u+v) \leq \log(1+u+v+uv) = \log((1+u)(1+v)) = \log(1+u)+\log(1+v),$$

sillä logaritmi on kasvava funktio ja $\log(ab) = \log(a)+\log(b)$ kaikilla $a, b > 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että d toteuttaa metriikan ehdot. Olkoon $s, t, u \in \mathbf{R}$. Ensinnäkin $d(s,t) = \log(1+|s-t|) \geq \log(1) = 0$ logaritmin kasvavuuden nojalla.

(M1):

$$\begin{aligned} d(s,t) = \log(1+|s-t|) &= \log(1+|s-u+u-t|) \\ &\leq \log(1+|s-u|+|u-t|) \\ &\leq \log(1+|s-u|) + \log(1+|u-t|) \\ &= d(s,u) + d(u,t), \end{aligned}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa kolmioepäyhtälöstä sekä logaritmin kasvavuudesta ja toinen epäyhtälö seuraa tehtävänannon arviosta sillä $|s-u|, |u-t| \geq 0$.

(M2):

$$d(s,t) = \log(1+|s-t|) = \log(1+|t-s|) = d(t,s).$$

(M3):

$$\begin{aligned} d(s,t) = 0 &\Leftrightarrow \log(1+|s-t|) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1+|s-t| = 1 \\ &\Leftrightarrow |s-t| = 0 \\ &\Leftrightarrow s = t. \end{aligned}$$

Näin ollen d toteutta ehdot (M1)-(M3), joten d on metriikka joukossa $\mathbf{R}$.

Pisteytys: Jokaisesta ehdosta (M1)-(M3), 2p. Jos päättelyssä virheitä, 0-1p riippuen virheen vakavuudesta. Jos ehdossa (M3) on osoitettu vain toinen suunta, 1p.

3. Olkoon

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y < z < x^2+y^2\}.$$

Näytä, että A on avoin joukko avaruuden $\mathbf{R}^3$ euklidisessa metriikassa.

Ratkaisu: Muokataan joukon A esitystapaa sellaiseksi, että voimme käyttää alkukuvaehtoa avoimuuden toteamiseksi.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y < z < x^2+y^2\} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y < z, z < x^2+y^2\}.$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y-z < 0,\ x^2+y^2-z > 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y-z < 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2-z > 0\}$$

Määritellään kuvaukset $f, g\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kaavoilla

$$f((x,y,z)) = x+y-z \text{ ja } g((x,y,z)) = x^2+y^2-z.$$

Tällöin joukko A voidaan kirjoittaa muodossa

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : f((x,y,z)) < 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : g(x,y,z) > 0\}$$

$$f^{-1}]-\infty,0[\cap g^{-1}]0,\infty[.$$

Kirjan lauseen 4.8. nojalla avoimien joukkojen $]-\infty,0[$ ja $]0,\infty[$ alkukuvat $f^{-1}]-\infty,0[$ ja $g^{-1}]0,\infty[$ ovat avoimia, jos kuvaukset f ja g ovat jatkuvia. Toisaalta kirjan lauseen 3.5. nojalla avoimien joukkojen äärellinen leikkaus on avoin. Näin ollen riittää osoittaa kuvausten f ja g jatkuvuus.

Kootaan alle lista tarvittavista jatkuvuuteen liittyvistä tiedoista.

1. Kirjan lauseen 5.6. nojalla projektiot $pr_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, jatkuvia jokaisella $j \in \{1,2,3\}$.

2. Kirjan lauseen 5.2. nojalla summakuvaus on jatkuva.

3. Kirjan lauseen 5.3. nojalla kuvaus $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m(x) = -x$ ja tulokuvaus ovat jatkuvia.

4. Kirjan lauseen 4.12. nojalla jatkuvien kuvausten yhdistettykuvaus on jatkuva.

Näiden tietojen avulla huomataan, että kuvaukset f ja g ovat jatkuvia, sillä

$$f = pr_1 + pr_2 - pr_3 \text{ ja } g = pr_1^2 + pr_2^2 - pr_3.$$

Pisteytys: Joukko A on osattu kirjoittaa alkukuvien leikkausten avulla perustellusti 1p. On mainittu, että avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin 1p. On osattu soveltaa alkukuvaehtoa tehtävän ratkaisussa 2p. On mainittu projektiokuvausten jatkuvuudesta 1p. On mainittu summa- ja tulokuvausten jatkuvuudesta 1p.

4. Olkoon $(E, |\cdot|)$ normiavaruus, ja $a, b \in E$ kiinnitettyjä vektoreita. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R} \to E$ asettamalla

$$f(t) = ta + (1-t)b, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Näytä: (i) f on Lipschitz-kuvaus $\mathbf{R} \to E$, (ii) f on jatkuva joukossa $\mathbf{R}$.
Joukossa $\mathbf{R}$ on tavallinen metriikka, ja normiavaruudessa E on normin määräämä metriikka $d(u, v) = |u - v|$, kun $u, v \in E$.

Ratkaisu: (i) Osoitetaan, että f on Lipschitz-kuvaus. Merkitään avaruuden E normia symbolilla $||\cdot||$, jotta se ei sekoitu reaalilukujen itseisarvon kanssa. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$d(f(x), f(y)) = ||f(x) - f(y)|| = ||xa + (1-x)b - (ya + (1-y)b)||$$

$$= ||(x-y)a-(x-y)b|| = ||(x-y)(a-b)|| \overset{N2}{=} |x-y|\cdot||a-b|| = ||a-b||\cdot|x-y|.$$

Yllä olevassa kaavassa symboli $\cdot$ tarkoittaa normaalia reaalilukujen kertolaskua. Siis f on $||a-b||$-Lipschitz, sillä $||a-b|| \geq 0$ ja vektorit a ja b ovat kiinnitettyjä.

Edellä olleessa todistuksessa löydettiin tarkin mahdollinen arvo, jolla f on Lipschitz-kuvaus. Aivan yhtä oikein olisi löytää toinen hiukan suurempi vakio $||a|| + ||b||$. Tämä löytyy seuraavasti.

$$d(f(x), f(y)) = ||(x-y)a-(x-y)b|| \overset{N1}{\leq} ||(x-y)a||+||(x-y)b|| \overset{N2}{=} (||a||+||b||)|x-y|.$$

HUOM. Tässä tehtävässä on tärkeää huomata, ettei ratkaisussa ole mahdollista soveltaa väliarvolausetta tai Schwartzin epäyhtälöä. Ensimmäistä ei voi soveltaa, sillä maaliavaruus ei ole $\mathbb{R}$ ja toista sillä maaliavaruus ei ole sisätuloavaruus ja $(x-y)(a-b)$ ei ole kahden vektorin pistetulo vaan vektori

$a - b$ kerrottuna skalaarilla $x - y$.

(ii) Koska f on Lipschitz-kuvaus, niin se on kirjan lauseen 4.5. nojalla jatkuva.

Pisteytys: (i) On huomattu, että lähtö- ja maaliavaruuksissa on eri metriikka 1p. On johdettu oikea Lipschitz-vakio $||a - b||$ tai $||a|| + ||b||$ 1p. Lipschitz-vakion johtamisessa on osattu käyttää normin ominaisuuksia $N1$ tai $N2$ oikein 1p. Vastaaja on muistanut Lipschitz-kuvauksen määritelmän 1p.
(ii) On vedottu lauseeseen 4.5. tai osoitettu jatkuvuus oikein 2p. Jatkuvuuden osoittamisessa on ollut pieni virhe 1p.