Sijoitustoiminnan matematiikka

Harri Nyrhinen, Helsingin yliopisto

Kevät 2013

Sisältö

1 Johdanto

Sijoitustoiminnalla voidaan katsoa olevan monenlaisia tavoitteita. Ensinnäkin sen avulla voidaan pyrkiä hakemaan tuottoja ylimääräisille varoille. Toiseksi, yrityksellä voi olla talouden kehitykseen sidottuja sopimuksia, jotka aiheuttavat maksuvelvollisuuksia tulevina ajanhetkinä. Sopivilla sijoituksilla näihin voidaan varautua. Voidaan myös ajatella, että sijoitustoiminnan avulla siirretään vapaana olevia pääomia taloudellisesti tehokkaaseen käyttöön.

Tyypillisesti sijoitustoimintaan liittyy riski. Hyvä esimerkki tällaisesta on pörssiosake. Tällöin sijoittaja omistaa osan yrityksestä, jonka osakkeista on kyse. Luonnollisesti sijoittaja odottaa saavansa osinkotuottoja tulevaisuudessa. Tappioita voi tulla esimerkiksi siten, että pörssikurssi laskee. Ääritapauksessa kyseinen yritys tekee konkurssin, jolloin osakkeet muuttuvat arvottomiksi.

Matemaattisesta näkökulmasta kiinnostavia asioita ovat esimerkiksi hinnoittelu (miten osakkeen hinta muodostuu ja riippuu muista sijoitusinstrumenteista) ja riskin hallinta (miten sijotusinstrumentteja voidaan käyttää suojautumiseen). Näistä osa-alueista on esitetty erinäisiä teorioita ja lähestymistapoja. Hyödylliseksi on osoittautunut erityyppisten rationaalisuusoletusten hyväksyminen markkinoiden toiminnan kuvaamiseksi. Tällaisia ovat esimerkiksi

- ’Tyhjästä’ ei voi tehdä rahaa (jos joku näin tekisi, joku toinen olisi menettävänä osapuolena, mikä ei ole rationaalista).
- Markkinat ovat aina sellaisessa tilassa, että ei ole kaikille osapuolille parempaa tilaa (ja aidosti parempaa vähintään yhdelle osapuolelle).
- Kukin toimija pyrkii omalta osaltaa parhaaseen mahdolliseen sijoitusstrategiaan.
- Saman tuoton omaavista sijoituksista parempi on se, jolla on pienempi riski; saman riskin omaavista sijoituksista parempi on se, jolla on suurempi tuotto.

Mainittujen rationaalisuusoletusten avulla pystytään hahmottelemaan matemaattisesti markkinoiden toimintaa. Kurssilla tarkastellaan tähän liittyviä teorioita ja näiden välisiä yhteyksiä.

Kurssin päälähteet ovat Panjer (1998) ja Föllmer and Schied (2011).

2 Deterministiset korkomarkkinat

Tarkastellaan lainojen ja talletusten sekä näistä johdettavissa olevien muiden instrumenttien teoriaa ympäristössä, jossa korko on etukäteen kiinnitetty ja kaikkien tiedossa. Oletukset ovat epärealistisia, mutta ympäristö sopii johdannoksi yleisemmille malleille.

Tyypillisesti rahaan liitetään *aika-arvo*. Edullisempaa on omistaa 100 euroa nyt kuin vuoden päästä. Esimerkiksi tästä syystä asuntolainalle ollaan valmiita maksamaan korkoa. Asunnon ostaminen 'nyt' lainan turvin tuottaa etua, koska asunnon saa käyttöönsä heti. Säästämällä pääsee samaan vain tulevaisuudessa. Toisaalta lainanantaja haluaa korkoa myöntämälleen lainalle. Tätä voi perustella sillä, että lainan myöntämisen jälkeen samaa rahaa ei voi sijoittaa toiseen (tuottavaksi arvioituun) kohteeseen. Lainanantaja ottaa myös riskin siitä, että lainanottaja ei aina pysty suoriutumaan velvoitteistaan.

Eri ajankohtina tapahtuvat suoritukset kytketään toisiinsa korkomekanismin avulla. Korot määräytyvät markkinoilla esimerkiksi kysynnän ja tarjonnan perusteella. Tässä luvussa ne oletetaan annetuiksi deterministisiksi vakioiksi ja tarkastellaan markkinoiden toimintaa tässä idealisoidussa ympäristössä.

2.1 Korkomalli

Tarkastellaan ympäristöä, jossa

1. Rahaa voi ottaa tai antaa lainaksi ajanhetkinä $0, \Delta, 2\Delta, \ldots$ ja korkoja ja lyhennyksiä voi maksaa samoina ajanhetkinä missä $\Delta > 0$ on vakio ja hetki 0 katsotaan nykyhetkeksi.

2. Välillä $[(j-1)\Delta, j\Delta)$, $j = 1, 2, \ldots$, suoritetaan vakioista *vuosikorkoa* $i_j \geq 0$.

3. Vuosikorko ei riipu talletuksen tai lainan suuruudesta.

4. Sivukustannuksia ei ole (käsittelykustannukset, verot jne.).

5. Lainan antamiselle tai saamiselle ei aseteta rajoituksia.

6. Luottotappioriskiä ei ole eli lainanottajan oletetaan aina selviytyvän velvoitteistaan.

Kohta 2 tulkitaan siten, että hetkellä $(j-1)\Delta$ voidaan tehdä talletus ajaksi Δ korolla i_j. Tämä on tiedossa kaikkina aikaisempina ajanhetkinä. Suunnitelmia voi tässä mielessä tehdä riskittömästi. Korkokanta tullaan jatkossa esittämään aina vuosikorkona. Sovellettuna väliin $[(j-1)\Delta, j\Delta)$ tulkitaan, että tallettamalla hetkellä $(j-1)\Delta$ ajaksi Δ määrä C pankkiin, on hetkellä $j\Delta$ nostettavissa määrä

$$C(1+i_j)^{\Delta}, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.1}$$

Vastaavasti hetkellä $(j-1)\Delta$ voidaan ottaa lainaa määrä L. Laina voidaan maksaa korkoineen takaisin hetkellä $j\Delta$ suorituksella

$$L(1+i_j)^{\Delta}.$$

Laajemmin, tallettamalla hetkellä $(j-1)\Delta$ pankkiin määrän C, on sen määrä korkoineen hetkellä $k\Delta$

$$C(1+i_j)^{\Delta}\cdots(1+i_k)^{\Delta} \qquad (k \geq j). \tag{2.2}$$

Samaan summaan päästään tallettamalla hetkellä $(j-1)\Delta$ määrä C, nostamalla hetkellä $j\Delta$ kaavan (2.1) mukaisesti $C(1+i_j)^{\Delta}$ ja tallettamalla tämä välittömästi takaisin ajaksi Δ. Myöhempinä hetkinä toimitaan samalla periaatteella.

Huomautus 2.1. Vuosikoron tulkinta voi eri lähteissä olla myös edellä esitetystä poikkeava. Esimerkiksi vuosikorko $i_j^{'}$ voidaan tulkita siten, että hetkellä $(j-1)\Delta$ tehty talletus C kasvaa hetkeen $j\Delta$ mennessä määräksi

$$C(1+i_j^{'}\Delta). \tag{2.3}$$

Tulos on sama kuin kaavassa (2.1), kun $i_j^{'}$ valitaan sopivasti. Kurssilla tulkinta tulee olemaan systemaattisesti kuten kaavassa (2.1) on esitetty.

Vuosikorot $i_1, i_2, \ldots$ ja koron määräytymismekanismi (2.2) muodostavat *korkomarkkinat*. Seuraavassa tarkastelut yleensä rajataan äärelliselle aikavälille $[0, T\Delta]$, missä $T \in \mathbb{N}$ on kiinteä.

Usein esiintyvä erikoistapaus on vakiokorko, jolloin

$$i_1 = i_2 = \ldots = i.$$

Tällöin välillä $[(j-1)\Delta, k\Delta)$ kaavan (2.2) mukaisesti talletus C kasvaa korkoa määräksi

$$C(1+i)^{(k-j+1)\Delta}.$$

Laskentakaava ilmaisee tavallisen korkoa korolle -periaatteen, missä korko liitetään kertyneeseen talletukseen ajanhetkinä $\Delta, 2\Delta, \ldots$ (minkä jälkeen myös kertyneelle korolle aletaan maksaa korkoa). Sama tulkinta koskee myös kaavaa (2.2).

2.2 Kassavirrat ja niiden arvostus

Tarkastellaan kohdan 2.1 mukaista idealisoitua korkoympäristöä. Oletetaan, että toimijalla on hetkellä 0 oikeus tuleviin suorituksiin

$$B(\Delta), B(2\Delta), \ldots, B(T\Delta),$$

missä $T \in \mathbb{N}$ on kiinteä. Tulkinta on, että hetkellä $j\Delta$ toimija saa haltuunsa rahamäärän $B(j\Delta)$. Tämä voi olla myös negatiivinen, jolloin toimija maksaa rahamäärän $-B(j\Delta)$. Kutsutaan tällaista suoritusjonoa *kassavirraksi*. Oikeus kassavirtoihin perustuu tyypillisesti sopimuksiin. Hetkellä $T\Delta$ kaikki sitoumukset päättyvät.

Usein on tarpeen määrätä kassavirran *arvo*. Tällä tarkoitetaan hintaa, jolla kassavirta voidaan myydä hetkellä 0. Negatiivisia hintoja ei suljeta pois. Oletetaan vielä, että kassavirtoihin ei liity luottotappioriskiä ja että kassavirtojen osto ja myynti on aina mahdollista.

Kassavirran arvon määräämisen lähtökohdaksi otetaan *arbitraasivapaus*. Tällä tarkoitetetaan sitä, että rahaa ei voi tehdä tyhjästä. Toisin sanoen toimijalla ei ole mahdollisuutta operoida markkinoilla siten, että hetkellä 0 varallisuus on nolla ja myöhempänä hetkenä varallisuus on positiivinen. Tässä sallitaan vain sellaiset operaatiot, jotka eivät edellytä panostamista missään vaiheessa. Siis omia varoja ei käytetä operointiin. Arbitraasivapausvaatimus on luontevimmillaan tehokkailla markkinoilla, jossa kysyntää ja tarjontaa on siksi paljon, että yksittäisen toimijan kannalta tarpeellinen operointi on aina mahdollista. Arbitraasin käsite on keskeinen modernissa finanssimatematiikassa. Erityisesti laajennus stokastiseen ympäristöön on mahdollinen, kuten myöhemmin tullaan näkemään.

Mikäli markkinoilla olisi arbitraasimahdollisuus, voitaisiin monistamalla 'tyhjästä rahaa' -tyyppistä operaatiota rikastua rajattomasti. Tavallisesti ajatellaan, että markkinat havaitsevat tällaiset tilanteet, minkä jälkeen hinnat muuttuvat siten, että arbitraasimahdollisuus katoaa.

Lause 2.1. *Olkoot korkomarkkinat kohdan 2.1 mukaiset. Silloin arbitraasivapailla markkinoilla deterministisen kassavirran*

$$B(\Delta), \dots, B(T\Delta) \tag{2.4}$$

arvo on

$$V(0) \doteq \sum_{j=1}^{T} [(1+i_1)\cdots(1+i_j)]^{-\Delta} B(j\Delta).$$

Lauseen mukainen $V(0)$ on kassavirran $B(\Delta), \dots, B(T\Delta)$ *nykyarvo*. Tämä on siis kassavirran hinta. Kertoimella $[(1+i_1)\cdots(1+i_j)]^{-\Delta}B(j\Delta)$ suoritus $B(j\Delta)$ *diskontataan* hetkeen 0.

Esimerkki 2.1. Toimija ottaa lainaa määrän L hetkellä 0 ja maksaa sen korkoineen takaisin kahdessa erässä: hetkellä Δ maksetaan määrä L_1 ja hetkellä 2Δ määrä L_2. Lauseen 2.1 hengessä ajatellaan, että toimija 'myy' pankille kassavirran $B(\Delta) = L_1, B(2\Delta) = L_2$ hintaan $V(0) = L$. Lainasopimuksen mukaan sitoumukset päättyvät hetkellä 2Δ erän L_2 maksamisen jälkeen. Lauseen 2.1 nojalla pätee

$$L = (1+i_1)^{-\Delta}L_1 + [(1+i_1)(1+i_2)]^{-\Delta}L_2.$$

Todistus. (Lause 2.1) Oletetaan, että kyseinen kassavirta pystyttäisiin myymään hintaan $V' > V(0)$. Ostaja siis saa myyjältä suoritukset (2.4) asianmukaisina ajanhetkinä. Myyjä pystyy toimimaan ilman alkuvarallisuutta seuraavasti. Talletetaan hetkellä 0 määrät

$$\begin{array}{ll} (1+i_1)^{-\Delta}B(\Delta) & \text{ajaksi } [0,\Delta) \\ [(1+i_1)(1+i_2)]^{-\Delta}B(2\Delta) & \text{ajaksi } [0,2\Delta) \\ \dots & \dots \\ [(1+i_1)\cdots(1+i_T)]^{-\Delta}B(T\Delta) & \text{ajaksi } [0,T\Delta). \end{array}$$

Kutsutaan näitä tileiksi $1,\dots,T$. Hintana saatu $V^{'}$ riittää talletusten tekemiseen ja myyjälle jää määrä $V^{'} - V(0) > 0$. Myyjä selviää sitoumuksistaan nostamalla hetkellä $j\Delta$ rahat tililtä j, $j = 1,\dots,T$. Kaavan (2.2) nojalla nimittäin tilin j talletus korkoineen on hetkellä $j\Delta$

$$[(1+i_1)\dots(1+i_j)]^{-\Delta}B(j\Delta)(1+i_1)^{\Delta}\dots(1+i_j)^{\Delta} = B(j\Delta).$$

Tallettamalla erotuksen $V^{'} - V(0)$ pankkiin on myyjän varallisuus hetkellä $T\Delta$

$$[(1+i_1)\dots(1+i_T)]^{\Delta}(V^{'} - V(0)) > 0.$$

Tämä on vastoin oletusta arbitraasivapaudesta.

Oletetaan, että olisi $V^{'} < V(0)$. Tällöin ilman alkuvarallisuutta voidaan toimia seuraavasti:

1. Otetaan pankkilainaa määrä $V^{'}$ hetkellä 0 ajaksi $[0,T\Delta)$. Laina maksetaan kertasuorituksella korkoineen takaisin hetkellä $T\Delta$. Suorituksen suuruus on tällöin

$$[(1+i_1)\dots(1+i_T)]^{\Delta}V^{'}. \tag{2.5}$$

2. Hetkellä 0 ostetaan kassavirta (2.4) saadulla rahamäärällä $V^{'}$.

3. Kullakin hetkellä $j\Delta$ saatava suoritus $B(j\Delta)$ talletetaan pankkiin ajaksi $[j\Delta, T\Delta)$. Kertyneet varat korkoineen nostetaan hetkellä $T\Delta$. Erä $B(j\Delta)$ korkoineen on tällöin

$$[(1+i_{j+1})\dots(1+i_T)]^{\Delta}B(j\Delta).$$

Hetkellä $T\Delta$ pankissa on yhteensä määrä

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{T}[(1+i_{j+1})\dots(1+i_T)]^{\Delta}B(j\Delta). \\ = \;& [(1+i_1)\dots(1+i_T)]^{\Delta}\sum_{j=1}^{T}[(1+i_1)\dots(1+i_j)]^{-\Delta}B(j\Delta) \\ = \;& [(1+i_1)\dots(1+i_T)]^{\Delta}V(0). \end{aligned}$$

Tämä ylittää maksettavaksi tulevan määrän (2.5). Varallisuus hetkellä $T\Delta$ on

$$[(1+i_1)\dots(1+i_T)]^{\Delta}(V(0) - V') > 0.$$

Tämä on ristiriita. $\square$

Lauseen 2.1 todistus voidaan ymmärtää myös seuraavasti. Kassavirta

$$B(\Delta), \ldots, B(T\Delta)$$

pystytään toistamaan käyttämällä mallin perusosia: rahan lainaamista ja tallettamista. Hetkellä 0 tehdään seuraavat toimenpiteet:

1. Jos $B(j\Delta)$ on positiivinen, talletetaan pankkiin ajaksi $[0, j\Delta)$ määrä

$$[(1+i_1)\ldots(1+i_j)]^{-\Delta}B(j\Delta), \quad j = 1, \ldots, T.$$

2. Jos $B(j\Delta)$ on negatiivinen, otetaan lainaa ajaksi $[0, j\Delta)$ määrä

$$-[(1+i_1)\ldots(1+i_j)]^{-\Delta}B(j\Delta), \quad j = 1, \ldots, T.$$

Toimenpiteet voidaan suorittaa, jos käytettävissä on hetkellä 0 käteistä lauseen 2.1 mukainen määrä $V(0)$. Hetkellä $j\Delta$ operaatioista syntyy juuri suoritus $B(j\Delta)$, $j = 1, \ldots, T$. Jos nyt kassavirran (2.4) suora ostaminen olisi hinnaltaan poikkeava kohtien 1 ja 2 mukaisista talletus- ja lainasopimuksista, syntyisi arbitraasimahdollisuus. Nimittäin hetkellä 0 ostettaisiin halvemmalla ja myytäisiin kalliimmalla sama kassavirta. Operaation suorittajalla ei olisi ongelmia selvitä sitoumuksistaan, koska syntyvät kaksi kassavirtaa kumoavat toisensa.

Edellisen nojalla voidaan todeta: jos kaksi sopimusjärjestelyä synnyttää saman kassavirran $B(\Delta), \ldots, B(T\Delta)$, on järjestelyjen hetken 0 arvojen yhdyttävä.

Esimerkki 2.2. (Etukäteinen sopimus) Hetkellä 0 toimija tekee sopimuksen, jossa hän sitoutuu ostamaan kassavirran

$$B((j+1)\Delta), \ldots, B(T\Delta).$$

Kassavirta ostetaan hetkellä $j\Delta$. Hetkellä 0 raha ei siis liiku. Mikä on hetkellä $j\Delta$ maksettava hinta?

Olkoon hinta $W(j)$. Sopimuksella toimija on hankkinut kassavirran

$$\begin{aligned} B(\Delta) &= 0, \ldots, B((j-1)\Delta) = 0, \\ B(j\Delta) &= -W(j),\ B((j+1)\Delta),\ \ldots,\ B(T\Delta) \end{aligned}$$

hintaan nolla. Lauseen 2.1 nojalla

$$0 = \sum_{k=1}^{T}[(1+i_1)\cdots(1+i_k)]^{-\Delta}B(k\Delta).$$

Siis

$$W(j) = \sum_{k=j+1}^{T}[(1+i_{j+1})\cdots(1+i_k)]^{-\Delta}B(k\Delta).$$

Hetken 0 mukaisen arvon lisäksi on tarpeen määrätä kassavirran tuleva arvo annetulla hetkellä $j\Delta$, $j = 1, \ldots, T$. Tällä tarkoitetaan hintaa, jolla tuleva kassavirta pystytään myymään kyseisellä hetkellä. Oletetaan, että toimijalla on hetkellä $j\Delta$ oikeus kassavirtaan

$$B((j+1)\Delta), \ldots, B(T\Delta).$$

Hetkellä $j\Delta$ tämän arvo arbitraasivapailla markkinoilla on

$$V(j) \doteq \sum_{k=j+1}^{T} [(1+i_{j+1}) \cdots (1+i_k)]^{-\Delta} B(k\Delta). \tag{2.6}$$

Perustelu on sama kuin lauseessa 2.1. Arvo yhtyy edellisen esimerkin etukäteisen sopmuksen hintaan $W(j)$. Tämä johtuu mallin deterministisyydestä.

Kaavan (2.2) ja lauseen 2.1 kassavirtoja voidaan arvostaa suorituksittain: määrätään kutakin erää $B(k\Delta)$ vastaava arvo. Kassavirran arvo on näiden summa. Yleisesti kassavirtojen hinnoittelu on additiivista, kun yhteenlasku määritellään luonnollisella tavalla: kassavirtojen

$$B(\Delta), \ldots, B(T\Delta) \quad \text{ja} \quad B'(\Delta), \ldots, B'(T\Delta)$$

summa on

$$B''(\Delta), \ldots, B''(T\Delta),$$

missä

$$B''(j\Delta) = B(j\Delta) + B'(j\Delta), \quad j = 1, \ldots T.$$

2.3 Arbitraasivapaus

Lause 2.1 antaa ainoan mahdollisen tavan hinnoitella kassavirtoja siten, että arbitraasimahdollisuutta ei synny. Täysin selvää ei ole, että tämäkään tapa johtaa arbitraasivapaisiin markkinoihin. Osoitetaan, että näin kuitenkin on.

Oletetaan, että markkinoilla on N instrumenttia. Instrumentti n antaa omistajalleen kassavirran

$$B_n(\Delta), \ldots, B_n(T\Delta),\ n = 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Oletetaan nyt, että kaikki kassavirrat hinnoitellaan lauseen 2.1 ja kaavan (2.6) mukaisesti. Hetkellä 0 hankitaan $\theta_n \in \mathbb{R}$ kappaletta instrumenttia n ilman alkuvarallisuutta. Siis

$$\sum_{n=1}^{N} \theta_n V_n(0) = 0,$$

missä

$$V_n(0) = \sum_{j=1}^{T} [(1+i_1) \ldots (1+i_j)]^{-\Delta} B_n(j\Delta).$$

Omaisuuden arvo hetkellä Δ on kaavan (2.6) nojalla

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\theta_n B_n(\Delta)}_{\text{käteinen}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\theta_n\sum_{k=2}^{T}[(1+i_2)\cdots(1+i_k)]^{-\Delta}B_n(k\Delta)}_{\text{tulevien kassavirtojen arvo}}$$
$$=(1+i_1)^{\Delta}\sum_{n=1}^{N}\theta_n\underbrace{\sum_{k=1}^{T}[(1+i_1)\cdots(1+i_k)]^{-\Delta}B_n(k\Delta)}_{V_n(0)}=0.$$

Siis varallisuus hetkellä Δ on 0.

Hetkellä Δ toimija sijoittaa hallussan olevan varallisuuden uudestaan markkinoille. Edellä todetun nojalla uusien instrumenttien kokonaishinnan on oltava 0. Olkoot uudet määrät $\theta_1',\ldots,\theta_N'$, jolloin siis

$$\sum_{n=1}^{N}\theta_n' V_n(1)=0,$$

missä

$$V_n(1)=\sum_{j=2}^{T}[(1+i_2)\ldots(1+i_j)]^{-\Delta}B_n(j\Delta).$$

Kuten edellä nähdään, että varallisuus hetkellä 2Δ on

$$\sum_{n=1}^{N}\theta_n' B_n(2\Delta)+\sum_{n=1}^{N}\theta_n'\sum_{k=3}^{T}[(1+i_3)\cdots(1+i_k)]^{-\Delta}B_n(k\Delta)=0.$$

Näin jatkaen todetaan, että varallisuus hetkellä $T\Delta$ on nolla. Siis arbitraasimahdollisuutta ei ole.

Lisälähde kohtaan 2: Norberg (1990).

3 Stokastinen korko

Realistisilla markkinoilla korkoihin liittyy tyypillisesti epävarmuutta. Esimerkiksi hetkellä 0 ei tiedetä, millaisella korolla hetkellä Δ saadaan lainaa. Tarpeen on siis tarkastella korkoja satunnaismuuttujina tai stokastisena prosessina.

Deterministiseen tilanteeseen voidaan päästä käyttämällä hyväksi markkinoilta yleisesti saatavia instrumentteja. Näitä esitellään seuraavassa.

3.1 Kiinteäkorkoiset instrumentit

Tarkastellaan kohdan 2.1 mukaista mallia, mutta oletetaan nyt vuosikorot stokastisiksi. Merkinnän i_j sijasta merkitään $\mathcal{I}_j$. Tarkastellaan korko- ja lainasopimuksia hetkellä 0. Tällöin voidaan ottaa lainaa ajaksi Δ korolla $s_1 = i_1$. Oletetaan siis, että ensimmäistä jaksoa koskeva korko on tiedossa oleva deterministinen vakio eli että $\mathcal{I}_1 = i_1$. Tulevaisuudessa otettavan lainan korko on satunnaismuuttuja. Sama koskee pidemmäksi ajaksi hetkellä 0 otettavaa vaihtuvakorkoista lainaa. Tällöin korko määräytyy kaavaa (2.5) vastaavalla tavalla, mutta $i_2, i_3, \ldots$ tulevat olemaan stokastisia. Talletukset ajatellaan samalla tavalla. Jos hetkellä 0 talletetaan määrä C vaihtuvalla korolla, on sen määrä korkoineen hetkellä $k\Delta$

$$C(1 + \mathcal{I}_1)^{\Delta} \cdots (1 + \mathcal{I}_k)^{\Delta}. \tag{3.1}$$

Tavallisesti lainaa voi saada ja talletuksia tehdä myös kiinteällä korolla. Instrumentteihin voi liittyä myös jälkimarkkinat. Tällöin talletuksia ja lainoja voidaan myydä ja ostaa edelleen kolmannen osapuolen kanssa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa markkinoilta on saatavissa hetkellä 0 korkoa talletukselle taulukon 3.1 mukaisesti.

Taulukko 1: 3.1

Eräpäivä	Vuosikorko
Δ	s_1
2Δ	s_2
$\vdots$	$\vdots$
$j\Delta$	s_j
$\vdots$	$\vdots$
$T\Delta$	s_T

Vuosikorot ovat ei-negatiivisia ja deterministisiä eli ovat tiedossa hetkellä 0. Taulukko 3.1 tulkitaan siten, että ajaksi $[0, j\Delta)$ hetkellä 0 tehty talletus C kasvaa hetkeen $j\Delta$ mennessä korkoa siten, että nostettavissa on rahamäärä

$$C(1 + s_j)^{j\Delta}.$$

Oletetaan, että lainoihin sovelletaan samaa korkomekanismia. Kutsutaan jatkossa s_1:tä *lyhyeksi koroksi*. Sovitaan lisäksi, että $s_0 = 0$. Taulukkoa 3.1 kutsutaan *korkorakenteeksi.*

Kutsutaan *j periodin nollakuponkibondiksi* instrumenttia, jonka haltija saa suorituksen 1 hetkellä $j\Delta$. Bondin *maturiteetti* on tällöin $j\Delta$. Hetkellä 0 tehtävä j periodin talletus

$$1/(1 + s_j)^{j\Delta}$$

vastaa juuri j periodin nollakuponkibondia.

Kohdassa 2.1 vuosikorko i_j liittyi aikaväliin $[(j-1)\Delta, j\Delta)$ (samoin kuin korko $\mathcal{I}_j$ edellä). Korot s_j liittyvät vaihtuvan mittaisiin aikaväleihin. Kohdan 2.1 deterministisessä ympäristössä s_j määräytyy ehdosta

$$(1+s_j)^{j\Delta} = (1+i_1)^{\Delta} \dots (1+i_j)^{\Delta}.$$

Olkoon korkorakenne annettu. Tarkastellaan hetkellä 0 tehtävää sopimusta, jossa toimija sitoutuu tallettamaan hetkellä $(j-1)\Delta$ määrän C pankkitilille. Talletus nostetaan hetkellä $k\Delta$, $k \geq j$. Hetkellä 0 rahaa ei liiku. Mikä on nostohetkellä $k\Delta$ saatava rahamäärä? Tämän on oltava vakio, joka kirjataan sopimukseen.

Olkoon kyseinen rahamäärä D. Sopimuksesta syntyy tallettajan näkökulmasta kassavirta

$$\begin{array}{lcr} B(\Delta) = B(2\Delta) = \dots = B((j-2)\Delta) & = & 0 \\ B((j-1)\Delta) & = & -C \\ B(j\Delta) = \dots = B((k-1)\Delta) & = & 0 \\ B(k\Delta) & = & D \\ B((k+1)\Delta) = \dots = B(T\Delta) & = & 0. \end{array}$$

Sama kassavirta syntyy ottamalla hetkellä 0 lainaksi hetkeen $(j-1)\Delta$ saakka määrä

$$C(1+s_{j-1})^{-(j-1)\Delta}$$

ja tallettamalla hetkellä 0 hetkeen $k\Delta$ saakka määrä

$$D(1+s_k)^{-k\Delta}.$$

Koska alkuperäinen sopimus ei maksa mitään hetkellä 0, ei arbitraasivapaassa ympäristössä saman kassavirran tuottava laina-/talletusjärjestely myöskään maksa mitään. Asiaa ei muuta se, että korot $\mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_T$ eivät ole tiedossa. Nimittäin edellä esitettyyn lainaan ja talletukseen liittyvät korot ovat deterministisiä ja tiedossa hetkellä 0. Tältä osin kohdan 2 tulokset pätevät. Arbtiraasivapauden on toteuduttava deterministisillä 'osamarkkinoilla'. On siis oltava

$$C(1+s_{j-1})^{-(j-1)\Delta} = D(1+s_k)^{-k\Delta}$$

eli

$$D = C\frac{(1+s_k)^{k\Delta}}{(1+s_{j-1})^{(j-1)\Delta}}. \tag{3.2}$$

Olkoon erityisesti $k = j$. Nähdään, että hetkellä $(j-1)\Delta$ tehtävä talletus C kasvaa hetkeen $j\Delta$ mennessä määräksi

$$C(1+f_j)^{\Delta},$$

missä

$$(1+f_j)^{\Delta} = \frac{(1+s_j)^{j\Delta}}{(1+s_{j-1})^{(j-1)\Delta}} \tag{3.3}$$

eli

$$f_j = \frac{(1+s_j)^j}{(1+s_{j-1})^{j-1}} - 1. \tag{3.4}$$

Korkoja $f_1, f_2, \dots$ kutsutaan seuraavassa *etukäteisiksi vuosikoroiksi*. Kohdassa 2.1 nämä yhtyivät vuosikorkoihin $i_1, i_2, \dots$. Mielivaltaista aikaväliä koskevan talletuksen arvo (3.2) voidaan määrätä etukäteisten vuosikorkojen avulla. Nimittäin kaavan (3.2) D on selvästi

$$D = C(1+f_j)^{\Delta} \cdots (1+f_k)^{\Delta}$$

(vrt. kaava (2.2)). Samoin nähdään kaavan (3.3) avulla, että

$$(1+s_j)^j = (1+f_1)\cdots(1+f_j), \quad \forall j. \tag{3.5}$$

Erityisesti $f_1 = s_1$.

3.2 Kassavirtojen arvostus

Pyritään nyt määräämään kohtaa 2 vastaten yleisen deterministisen kassavirran arvo. Tulkinta on sama kuin aiemminkin.

Tarkastellaan ensin hetkellä 0 tehtäviä kassavirtojen ostoja ja myyntejä. Olkoon markkinoilla taulukon 3.1 mukaiset kiinteäkorkoiset instrumentit. Millä hinnalla arbitraasivapaassa ympäristössä ostetaan hetkellä 0 deterministinen kassavirta

$$B(\Delta), B(2\Delta), \dots, B(T\Delta)? \tag{3.6}$$

Lause 3.1. *Edellä esitetyssä ympäristössä kassavirran* (3.6) *arvo* $V(0)$ *hetkellä 0 on*

$$V(0) = \sum_{j=1}^{T} [(1+f_1)\cdots(1+f_j)]^{-\Delta} B(j\Delta). \tag{3.7}$$

Todistus. Talletetaan hetkellä 0 määrä

$$B(j\Delta)/(1+s_j)^{j\Delta} \tag{3.8}$$

ajaksi $[0, j\Delta)$, $j = 1, \dots, T$. Nämä talletukset purkautuvat kassavirran (3.6) mukaisesti. Arbitraasivapaassa ympäristössä on oltava

$$V(0) = \sum_{j=1}^{T} \frac{B(j\Delta)}{(1+s_j)^{j\Delta}}.$$

Kaavan (3.5) nojalla tämä on juuri (3.7). □

Erityisesti k periodin nollakuponkibondin arvo hetkellä 0 on

$$V(0) = \frac{1}{(1+s_k)^{k\Delta}},$$

kuten pitääkin.

Oletetaan nyt, että toimija on ostanut kassavirran (3.6) hetkellä 0. Millä hinnalla se pystytään myymään myöhempänä ajanhetkenä $j\Delta$? Sopimus tehdään hetkellä $j\Delta$.

Malli ei anna yksiselitteistä vastausta kysymykseen. Nimittäin taulukko 3.1 muuttuu ajan myötä. Hetkellä $j\Delta$ on jo havaittu vuosikorot $s_1, \dots, s_j$ ja s_{j+1}. Markkinat määrittelevät näiden ja muun informaation perusteella uudelleen taulukon 3.1. Hetkellä $j\Delta$ oletetaan kyseisten instrumenttien olevan olemassa, mutta korot voivat olla muuttuneet eivätkä ne siis ole tiedossa hetkellä 0. Asiaa havainnollistaa taulukko 3.2.

Taulukko 2: 3.2

Eräpäivä	Vuosikorko
$(j+1)\Delta$	s_{j1}
$(j+2)\Delta$	s_{j2}
$\vdots$	$\vdots$
$(j+T)\Delta$	s_{jT}

Taulukko 3.1 vastaa taulukkoa 3.2, kun $j=0$ ja $s_{0k}=s_k$ kaikilla $k=1,\dots,T$. Sovitaan lisäksi, että $s_{k0}=0$. Hetkellä $j\Delta$ voidaan määritellä etukäteiset korot f_{jk} ehdosta

$$(1+f_{jk})^{\Delta} = \frac{(1+s_{jk})^{k\Delta}}{(1+s_{j,k-1})^{(k-1)\Delta}}, \quad k=1,2,\dots. \tag{3.9}$$

Myös etukäteiset korot on tulkittava satunnaismuuttujiksi hetkellä 0, jos $j \geq 1$. Todetaan myös, että $f_{0k}=f_k$ vastaten kaavaa (3.3).

Ilmeisesti lause 3.1 soveltuu hetkeen $j\Delta$, joten kassavirran

$$B((j+1)\Delta), \dots, B(T\Delta)$$

arvo tällöin on

$$\begin{aligned} V(j) &= \sum_{k=1}^{T-j} [(1+f_{j1})\cdots(1+f_{jk})]^{-\Delta} B((j+k)\Delta) \\ &= \sum_{k=1}^{T-j} (1+s_{jk})^{-k\Delta} B((j+k)\Delta). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Kysymys arbitraasivapaudesta stokastisessa korkoympäristössä on kohdan 2 mallia mutkikkaampi. Lähtökohdaksi tarvitaan mekanismi korkorakenteen kehittymiselle ajassa. Tarkastellaan asiaa kuitenkin pintapuolisesti jo tässä vaiheessa.

Todetaan aluksi, että taulukon 3.1 vuosikorkojen s_j tulee olla sisäisesti yhteensopivia. Vuosikorot eivät välttämättä ole monotonisia eräpäivän suhteen. Tulee kuitenkin olla

$$(1+s_k)^k \geq (1+s_j)^j, \quad \forall k \geq j. \tag{3.11}$$

Muuten voitaisiin ottaa hetkellä 0 pankista lainaa ajaksi $[0, k\Delta)$ määrä C ja tallettaa se välittömästi ajaksi $[0, j\Delta)$ samaan pankkiin. Aikaväli $[j\Delta, k\Delta)$ raha voidaan pitää käteisenä (jolloin ei saada korkoa). Operaatioiden jälkeen talletuksesta on syntynyt rahamäärä

$$C(1+s_j)^{j\Delta}.$$

Jos (3.11) ei päde, niin saadaan

$$C(1+s_k)^{k\Delta} < C(1+s_j)^{j\Delta},$$

joten laina pystytään maksamaan ja syntyy arbitraasi. Helposti nähdään, että (3.11) pätee, $\forall j \leq k$, jos ja vain jos $f_j \geq 0$, $\forall j$.

Tarkastellaan esimerkkiä korkorakenteen kehityksen mallista. Olkoon $\Delta = 1$. Tarkastellaan vain ajanhetkiä 0 ja 1. Korkorakenne hetkellä 0 on tiedossa. Olkoon $\mathcal{I}_2$ hetkellä 1 havaittava yhden vuoden korko vastaten korkoa s_{11} taulukossa 3.2. Tämä on siis myös mallinnettava. Oletetaan, että on olemassa funktiot $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$s_{1k} = g_k(\mathcal{I}_2), \qquad k = 1, \ldots, T. \tag{3.12}$$

Jos sijoittajalla on hallussaan k vuoden nollakuponkibondeja θ_k kappaletta, niin bondien kokonaisarvo hetkellä 0 on

$$V(0) = \sum_{k=1}^{T} (1+s_{0k})^{-k}\theta_k.$$

Hetkellä 1 varallisuus on

$$U(1) = \theta_1 + V(1),$$

missä

$$V(1) = \sum_{k=2}^{T} (1+g_{k-1}(\mathcal{I}_2))^{-k+1}\theta_k.$$

Arbitraasiksi kutsutaan tilannetta, jossa $V(0) = 0$ ja $\theta_1, \ldots, \theta_T$ voidaan valita siten, että

$$\mathbb{P}(U(1) \geq 0) = 1, \quad \mathbb{P}(U(1) > 0) > 0.$$

Tällöin sijoittajalla on voiton mahdollisuus ilman riskiä. Arbitraasiteoriaan stokastisessa ympäristössä palataan kohdassa 5.

Esimerkki 3.1. (Joukkovelkakirja). Valtio laskee liikkeelle seuraavantyyppisiä lainoja. Hetkellä 0 sijoittaja maksaa valtiolle erään summan C. Ajanhetkinä $\Delta, 2\Delta, \ldots, T\Delta$ valtio maksaa sijoittajalle *kuponkikoron* B ja hetkellä $T\Delta$ lisäksi *pääoman palautuksen* C'. Valtiota pidetään tavallisesti varmana lainan takaisinmaksajana, jolloin sijoittajalla ei ole luottotappioriskiä.

Summan C ja syntyvän kassavirran

$$\underbrace{B, \ldots, B}_{\text{T-1 kpl}}, B + C' \tag{3.13}$$

yhteys ajatellaan tavallisesti seuraavasti. Valtio lainaa sijoittajalta velkakirjan *nimellisarvon* C' mukaisen määrän kiinteällä korolla r. Ajanhetkinä $\Delta, 2\Delta, \ldots, T\Delta$ maksetaan summalle C' korkoa tällä vuosikorolla. Näin ollen

$$B = ((1 + r)^{\Delta} - 1)C'. \tag{3.14}$$

Hetkellä 0 maksettu summa tulkitaan kassavirran (3.13) hinnaksi lauseen 2.1 mukaisesti olettamalla, että $i_j = r$, $j = 1, \ldots, T$. Tällöin

$$\begin{aligned} C &= \sum_{j=1}^{T} (1 + r)^{-j\Delta} B + \frac{C'}{(1 + r)^{T\Delta}} \\ &= C'. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Tästä näkökulmasta hetkellä $T\Delta$ suoritettavaa määrää C' on luonnollista kutsua pääoman palautukseksi. Ajanhetkinä $\Delta, 2\Delta, \ldots, (T - 1)\Delta$ maksetaan vain korkoa. Tulevan kassavirran arvo on C myös ajanhetkinä

$$\Delta, 2\Delta, \ldots, (T - 1)\Delta$$

lauseen 2.1 mukaisesti, kun $i_1 = \ldots = i_T = r$.

Joukkovelkakirjoja voidaan pitää osaltaan taulukon 3.1 rakennusosina, vaikka kassavirrat ovatkin tässä mutkikkaampia. Otetaan esimerkissä kuitenkin erilainen näkökulma.

Oletetaan, että taulukon 3.1 vuosikorot s_j on annettu. Olkoon lisäksi

$$s_1 = \ldots = s_T = r \quad \text{ja} \quad \Delta = 1.$$

Tällöin kassavirran (3.13) arvo hetkellä 0 on lauseen 3.1 nojalla juuri $V(0) = C'$ vastaten tulosta (3.15).

Oletetaan, että hetkellä 1 taulukon 3.2 vuosikorot ovat myös vakioita,

$$s_{1k} = \ldots = s_{1T} = r'.$$

Tällöin tulevan kassavirran arvo on

$$\begin{aligned} V(1) &= \sum_{j=1}^{T-1}(1+r')^{-j}B + \frac{C'}{(1+r')^{T-1}} \\ &= C'\left[\frac{r}{r'}\left(1-\frac{1}{(1+r')^{T-1}}\right)+\frac{1}{(1+r')^{T-1}}\right] \end{aligned}$$

Jos $r = r'$, on arvo edelleen $V(1) = C'$. Jos $r' < r$, niin $V(1) > C'$ ja jos $r' > r$, niin $V(1) < C'$. Sijoituksen arvoon sisältyy siis korkoriski.

Todettakoon tässä yhteydessä, että taulukoissa 3.1 ja 3.2 vuosikorot eivät voi olla yleisesti vakioita, vaikka esimerkissä niin oletettiinkin. Vakioisuus laajassa mielessä johtaa arbitraasimahdollisuuteen, kuten myöhemmin todetaan.

3.3 Immunisaatiosta

Tarkastellaan lyhyesti tulevien ja menevien kassavirtojen yhteensovitusta klassisen immunisaatioteorian valossa. Ajatuksena on suojautua tulevia korkomuutoksia vastaan.

Esimerkki 3.2. Oletetaan, että henkilö ostaa hetkellä 0 eläkevakuutuksen vakuutusyhtiöltä. Henkilö maksaa hetkellä 0 vakuutusmaksun P. Yhtiö maksaa vuosittain henkilölle summan E niin kauan kuin tämä on elossa. Yhtiön kannalta syntyy kassavirta

$$P, \underbrace{-E, \ldots, -E}_{\text{T kpl}}.$$

Tässä T on todellisuudessa satunnaismuuttuja, koska elinaika ei ole tiedossa. Suhtaudutaan siihen kuitenkin kuten vakioon. Luonnollisesti yhtiö sijoittaa saamansa vakuutusmaksun P esimerkiksi pankkiin tai osakkeisiin. Syntyvä kassavirta hetkinä $1, \ldots, T$ on muotoa

$$A_1 - E, A_2 - E, \ldots, A_T - E.$$

Hetken 0 suoritus on nolla, koska vakuutusmaksu P ajatellaan sijoitetuksi saman tien kokonaisuudessaan markkinoille. Sijoituksista syntyvät tulot $A_1, \ldots, A_T$ ovat yleisesti ottaen satunnaisia.

Yhtiön näkökulmasta tärkeitä seikkoja ovat vakuutusmaksun P määrääminen sekä syntyvän kassavirran hallinnoiminen. Jälkimmäisen ongelman osalta todettakoon, että vakuutetulla on usein oikeus päättää sopimus, jolloin alkuperäisen suunnitelman mukainen kassavirta muuttuu radikaalisti. Tämä on eräs syy sille, että yhtiö ei voi yksinkertaisella tavalla suojautua vastattavanaan olevaa kassavirtaa vastaan.

Tarkastellaan asiaa nyt yleisesti. Oletetaan, että sopimuksen osapuolella on vastattavanaan deterministinen kassavirta $B(i) = L_i \geq 0, i = 1, \ldots, T$. Tämän katteena on omaisuutta, joka tuottaa deterministisen kassavirran $A_i \geq 0, i = 1, \ldots, T$. Kokonaiskassavirta on siis

$$A_1 - L_1, A_2 - L_2, \ldots, A_T - L_T.$$

Tavoitteena on, että tulevien tulojen ja menojen arvot olisivat samat. Koron muutokset aiheuttavat tarpeen sijoitusten uudelleenjärjestelemiseen.

Lähdetään siis liikkeelle vaatimuksesta, että tulevien ja menevien kassavirtojen arvojen on yhdyttävä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että hetkellä 0 taulukon 3.1 korot ovat identtisiä ja että $\Delta = 1$. Olkoon $s = s_1 = \ldots = s_T$. Tällöin vaatimus on

$$\sum_{j=1}^{T} (1+s)^{-j}(A_j - L_j) = 0. \tag{3.16}$$

Järjestelyn korkoherkkyyttä voidaan tutkia antamalla koron s muuttua kaavassa (3.16). Luontevaa on ajatella, että tarkastelu tehdään hetkellä -1, jolloin koko kassavirta on alttiina hetkellä 0 tapahtuville korkomuutoksille. Toivottavaa olisi, että yhtälö (3.16) kestäisi näitä kohtuullisesti. Merkitään

$$f(x) = \sum_{j=1}^{T} (1+x)^{-j}(A_j - L_j).$$

Tällöin siis $f(s) = 0$. Taylorin kehitelmän nojalla

$$f(s+\epsilon) = f(s) + \epsilon f'(s) + O(\epsilon^2), \text{ kun } |\epsilon| \to 0.$$

Muutoksen $f(s+\epsilon) - f(s)$ kertaluku on tällöin pieni, jos $|\epsilon|$ on pieni ja $f'(s) = 0$. Vaaditaan siis, että $f'(s) = 0$ eli että

$$\sum_{j=1}^{T} j(1+s)^{-j} A_j = \sum_{j=1}^{T} j(1+s)^{-j} L_j. \tag{3.17}$$

Sijoitustuottojen jakauman valinnassa saadaan siis suojaa pieniä korkomuutoksia vastaan vaatimalla ehdon (3.16) lisäksi (3.17). Tämä on eräs klassisen immunisaatioteorian antama tulos. Suuretta

$$D(s) = \frac{\sum_{j=1}^{T} j(1+s)^{-j} A_j}{\sum_{j=1}^{T} (1+s)^{-j} A_j} \tag{3.18}$$

kutsutaan kassavirran $A_1, \ldots, A_T$ *Macaulayn duraatioksi.* Se kuvaa kassavirran sijoittumista aika-akselille. Suuri duraatio merkitsee, että kassavirta painottuu myöhäisiin ajanhetkiin. Duraatio on myös tulkittavissa odotusarvoksi. 'Satunnaismuuttuja' on tällöin kassavirran osan toteutushetki. Jakauma määräytyy suoritusten suuruuksista. Täsmällisemmin,

$$\begin{aligned} D(s) &= \mathbb{E}(\tau) = \sum_{k=1}^{T} \mathbb{P}(\tau = k)k, \\ \mathbb{P}(\tau = k) &= \frac{(1+s)^{-k} A_k}{\sum_{j=1}^{T} (1+s)^{-j} A_j}. \end{aligned}$$

Vaatimukset (3.16) ja (3.17) merkitsevät, että kassavirtojen $A_1, \ldots, A_T$ ja $L_1, \ldots, L_T$ arvot ja duraatiot yhtyvät vuosikorolla s.

Selvästi kassavirran $A_1, \ldots, A_T$ duraatio voidaan esittää muodossa

$$D(s) = -\frac{(1+s)g'(s)}{g(s)},$$

missä

$$g(x) = \sum_{j=1}^{T} (1+x)^{-j} A_j.$$

Tulkinnallisesti mukavampi esitys saadaan tarkastelemalla vuosikoron x sijaan *korkoutuvuutta* $\delta = \delta(x)$, joka määräytyy ehdosta

$$1 + x = e^{\delta}.$$

Olkoon

$$h(\delta) = \sum_{j=1}^{T} e^{-\delta j} A_j.$$

Tällöin $h(\delta)$ on kassavirran $A_1, \ldots, A_T$ arvo ja

$$D(s) = -\frac{h'(\delta)}{h(\delta)},$$

kun $1 + s = e^{\delta}$. Duraatio kuvaa siis tarkasteltavan kassavirran arvon suhteellista muutosta korkoutuvuuden muuttuessa hieman. Tässä mielessä sitä voidaan pitää korkoriskin mittarina.

Klassisen teorian antama tulos (3.17) on sinänsä luonnollinen. Vaatimus pakottaa tarkasteltavat kassavirrat tietynlaiseen tasapainoon. Tuloksen johtaminen perustui yksinkertaistukseen, jossa taulukon 3.2 vuosikorot ovat vakioita. Vakio tosin muuttui vuodesta toiseen. Tämän tyyppinen korkorakenne on kuitenkin liian yksinkertainen. Nimittäin malliin kätkeytyy arbitraasimahdollisuus.

Asian perustelemiseksi oletetaan siis, että vuosikorot taulukossa 3.2 ovat aina vakioita. Olkoon

$$s_{01} = s_{02} = \ldots = s_{0T} = s.$$

Seuraavan vuoden korko olkoon s', joka on hetkellä 0 tulkittava satunnaismuuttujaksi. Oletetaan kuitenkin, että kaavassa (3.12) $g_k(x) = x, \forall x$, jolloin

$$s_{11} = s_{12} = \ldots = s_{1T} = s' \qquad (= \mathcal{I}_2).$$

Tarkastellaan hetkellä 0 tehtäviä operaatioita, jotka johtavat kassavirtaan $A_1, -L_2, A_3$, missä $L_2 = 1$ ja A_1 ja A_3 valitaan immunisaatioteorian mukaisesti. Saadaan vaatimukset

$$(1+s)^{-1}A_1 + (1+s)^{-3}A_3 = (1+s)^{-2}L_2, \tag{3.19}$$

$$(1+s)^{-1}A_1 + 3(1+s)^{-3}A_3 = 2(1+s)^{-2}L_2. \tag{3.20}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(1+s)^{-1}, \\ A_3 &= \frac{1}{2}(1+s). \end{aligned}$$

Kaavan (3.19) nojalla kassavirran $A_1, -L_2, A_3$ hankkiminen hetkellä 0 ei maksa mitään. Hetkellä 1 käteisvarat ovat $\frac{1}{2}(1+s)^{-1}$ ja hallussa on kassavirta $-L_2, A_3$. Tämä voidaan myydä hetkellä 1 hintaan

$$(1+s')^{-2}A_3 - (1+s')^{-1}L_2 = \frac{1}{2}(1+s')^{-2}(1+s) - (1+s')^{-1},$$

kts. kaava (3.10). Myynnin jälkeen varallisuus yhteensä on

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1+s)^{-1} + \frac{1}{2}(1+s')^{-2}(1+s) - (1+s')^{-1} \\ = & \frac{1}{2}(1+s)^{-1}(1+s')^{-2}[(1+s')^2 + (1+s)^2 - 2(1+s)(1+s')] \\ = & \frac{1}{2}(1+s)^{-1}(1+s')^{-2}(s'-s)^2. \end{aligned}$$

Varallisuus on aina ei-negatiivinen ja aidosti positiivinen, jos $s' \neq s$. Jos siis $\mathbb{P}(s' = s) < 1$, voidaan edellä esitetty operaatio tehdä riskittömästi ilman alkuvarallisuutta ja voiton todennäköisyys on positiivinen. Saatiin siis arbitraasi.

Edellä esitetty tarkastelu osoittaa, että mallinnuksessa on syytä olla varovainen. Immunisaatioteoriaa on myöhemmin kehitetty suuntaan, jossa arbitraasi on eliminoitu markkinoilta. Esimerkki tällaisesta on esitetty lähteessä Panjer (1998), luku 3.

4 Yleistä arvopapereiden hinnoittelusta

Edellä esitellyt bondit ovat esimerkkejä arvopapereista. Keskeinen piirre näissä on, että tulevat kassavirrat ovat tarkalleen tiedossa. Voidaan puhua riskittömästä arvopaperista tässä mielessä. Sijoittajalla on käytettävissä erinäisiä muita vaihtoehtoja. Esimerkkejä ovat

- riskilliset bondit (nämä ovat samanlaisia kuin tavalliset bondit, mutta sovittu kassavirta voi katketa lainanottajan maksukyvyttömyyden takia)
- osakkeet
- osakkeisiin liittyvät johdannaiset
- reaaliomaisuus.

Tarkastellaan johdannoksi traditionaalista osakkeiden hinnoittelua. Todetaan aluksi, että osakkeiden omistaminen merkitsee osaomistusta 'allaolevaan' yritykseen. Tyypillisesti suuryritysten omistus jakautuu useille osapuolille osakeomistusten kautta. Omistajat ovat oikeutettuja yhtiön voittoihin, jotka jaetaan osinkoina. Tavallisesti osakkeet ovat likvidejä eli niitä on helppo ostaa ja myydä pörssin välityksellä. On myös syytä todeta, että erityisesti pörssiyhtiöistä on saatavissa informaatiota tiettyjen sääntöjen puitteissa.

Traditionaalinen luonnollisen tuntuinen osakkeen arvo on

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(1+i)^n}, \tag{4.1}$$

missä D_n on vuonna n maksettava osinko/osake ja i vuosikorko (joka on tässä ajateltu vakioksi). Jos

$$D_n = D = \text{ vakio}, n = 1, 2, \ldots,$$

niin arvo on siis $\frac{D}{i}$. Tämä vastaa bondien hinnoittelua vastaavassa ympäristössä. Voisi olla myös esimerkiksi $D_n = (1+g)^n D$, missä $g \geq 0$ kuvaa reaalikasvua.

Ongelmana kaavassa (4.1) on, että D_n on luonnollisimmin tulkittava satunnaismuuttujaksi, kun taas hinnan kullakin hetkellä tulee olla deterministinen vakio. Satunnaisuutta syntyy esimerkiksi siksi, että allaolevan yhtiön voitot ovat alttiita kilpailutilanteelle ja taloudellisille suhdanteille. Osinkojen arvon sijaan voisi olla sopivaa käyttää odotusarvoa hinnan määrittelyssä ja jalostaa (4.1) muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(D_n)}{(1+i)^n}. \tag{4.2}$$

Jos $\mathbb{E}(D_n) = D =$ vakio, on hinta nytkin $\frac{D}{i}$ bondien hinnoittelua vastaten. Oleellinen ero osakkeessa on siihen liittyvä epävarmuus eli riski. Usein sijoittajat ajatellaan riskinkaihtajiksi, jolloin varma bondituotto on parempi vaihtoehto kuin odotusarvomielessä saman suuruinen riskillinen tuotto. Riski otetaan traditionaalisessa mallissa huomioon käyttämällä suurempaa diskonttaustekijää. Osakkeen hinta on tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(D_n)}{(1+i')^n}, \tag{4.3}$$

missä $i' > i$. Kaava on perusteltu siinä mielessä, että epävarmuus on sitä suurempi mitä kauempana tuleva tuotto D_n on. Diskonttaus kutistaa tämän osan vaikutusta hintaan tätä vastaten. Ongelmana on, miten i' määrätään. Ilmeisesti riski riippuu yrityksestä, jonka osakkeesta on kysymys. Voidaan myös ajatella, että i' on sijoittajan tuottovaatimus osakkeelle ja hinta määräytyy sen mukaisesti kaavalla (4.3).

Täysin toisen tyyppinen kuvaus hinnoille saadaan pyrkimällä löytämään stokastinen prosessi, joka sopii historian valossa kuvaamaan osakkeen hintakehitystä. Olkoon S_n osakkeen hinta vuonna n ja S_0 = vakio. Ehkä yksinkertaisin käytössä oleva malli on

$$\log S_n = \log S_{n-1} + \epsilon_n,$$

missä ϵ_n on jono riippumattomia $N(\mu, \sigma^2)$-jakautuneita satunnaismuuttujia. Tällöin

$$S_n = S_0 e^{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n}$$

on log-normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja. Tätä käytetään lähinnä lyhyellä aikavälillä. Pitkän aikavälin tarkastelussa malli ei vastaa tyydyttävästi havaintoja.

5 Arbitraasihinnoittelusta

Oletetaan, että markkinoilla on joukko pörssiosakkeita sekä näiden arvokehitykseen perustuvia muita instrumentteja, niin sanottuja johdannaisia. Lisäksi markkinoilla on riskitön arvopaperi, esimerkiksi vuoden nollakuponkibondi. Oletetaan, että markkinat ovat 'tehokkaat' siinä mielessä, että arvopapereita on aina ostettavissa ja myytävissä haluttu määrä. Lisäksi oletetaan, että sivukustannukset ovat niin pieniä, että ne voidaan unohtaa.

Arbitraasihinnoittelussa perusajatuksena on, että markkinoilla ei voi tehdä riskittömästi voittoa. Tämä edellyttää hinnoilta tietynlaista yhteensopivuutta.

Peruselementteinä markkinoilla voidaan pitää mainittuja osakkeita ja bondia. Mikäli osakkeet hinnoitellaan esimerkiksi kohdan 4 ajatuksiin nojautuen, ei arbitraasia helpostikaan synny. Eri osakkeiden tuottojen riippuvuus kylläkin antaa aiheen tiettyyn varovaisuuteen. Peruselementeistä voidaan konstruoida johdannaisia, jolloin arbitraasi syntyy helpommin. Johdannaiset ovat instrumentteja, joiden arvo on sidottu markkinoiden peruselementtien arvoihin. Seuraavat esimerkit havainnollistavat asiaa.

1. Eurooppalainen osto-optio. Arvopaperin omistajalla on oikeus ostaa tietty osake sovittuun hintaan sovittuna ajanhetkenä. Ostovelvollisuutta ei ole.

2. Eurooppalainen myyntioptio. Kuten edellä, mutta nyt on oikeus myydä.

3. Termiini. Tietty osake ostetaan sopijaosapuolelta sovittuun hintaan sovittuna ajanhetkenä. Sopimus velvoittaa molempia osapuolia eli osake vaihtaa aina omistajaa.

4. Korkotakuu. Vaihtuvaan stokastiseen korkoon sidotulle talletukselle taataan vähintään sovittu kiinteä korko. Instrumentti on johdannainen tulevina vuosina toteutuvista koroista.

5. Valuuttaoptio. Sopimuksen omistajalla on oikeus ostaa esimerkiksi euroilla dollareita sovittuun kurssiin sovittuna ajanhetkenä.

Tarkastellaan yksinkertaistettua tilannetta, jossa elementteinä ovat:

1. Diskreettinä ajanhetkinä $0, 1, 2, \ldots, T$ tehtävät osto- ja myyntioperaatiot arvopapereilla.

2. Arvopaperit $1, \ldots, N$. Arvopaperin arvoa (hintaa) hetkellä k merkitään symbolilla $S_n(k)$. Siis hetkellä k yksi kappale arvopaperia n voidaan ostaa tai myydä hintaan $S_n(k)$. Mallinnetaan $S_n(k)$ satunnaismuuttujaksi. Hetkellä 0 tulee hinnan olla tiedossa. Oletetaan siis, että $S_n(0)$ on vakio, $n = 1, \ldots, N$. Lisäksi oletetaan, että arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi eli että $S_1(1) = 1$ m.v. Olkoon vuosikorko i, jolloin $S_1(0) = \frac{1}{1+i}$. Oletetaan, että $i \geq 0$.

3. Todennäköisyyskenttä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jossa kaikki muuttujat $S_n(k)$ on määritelty.

Tarpeen mukaan ω kirjoitetaan näkyviin hintoihin merkitsemällä $S_n(k, \omega)$ $S_n(k)$:n sijaan.

Alkiot $\omega \in \Omega$ voidaan ajatella markkinoiden tiloiksi. Jos tila ω on tiedossa, tiedetään kaikkien arvopapereiden hinnat kaikkina ajanhektinä $0, 1, \ldots, T$. Tämä on tilanne hetkellä T. Aiempina hetkinä informaatio on tyypillisesti epätäydellistä. Tietty osa tiloista voi realisoitua. Hetkellä 0 kaikki tilat ovat vielä mahdollisia.

5.1 Yhden periodin malli

Oletetaan tässä kappaleessa, että $T = 1$. Hetkellä 0 sijoittaja voi hankkia *salkun*

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^T \in \mathbb{R}^N.$$

Tässä θ_n kuvaa arvopaperin n lukumäärää salkussa. Arbiraasiteoriassa sallitaan lukumäärille myös ei-kokonaislukuarvot ja negatiiviset arvot. Negatiivinen määrä osakkeita ymmärretään siten, että sijoittaja 'lainaa' osakkeita ja myy ne. Myöhemmin sijoittaja joutuu ostamaan osakkeet takaisin ja palauttamaan ne. Tällöin puhutaan *lyhyeksi myynnistä.*

Salkusta sijoittaja joutuu maksamaan hinnan

$$S(0)\theta = \sum_{n=1}^{N} S_n(0)\theta_n \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

missä $S(0) = (S_1(0), \ldots, S_N(0)) \in \mathbb{R}^N$ on *hintavektori*. Kuten edellä todettiin, muuttujat $S_n(0)$, $n = 1, \ldots, N$ eivät ole aitoja satunnaismuuttujia, joten salkun hinta on reaaliluku.

Hetkellä 1 salkun arvo on

$$S(1)\theta = \sum_{n=1}^{N} S_n(1)\theta_n \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

missä $S(1) = (S_1(1), \ldots, S_N(1)) \in \mathbb{R}^N$. Salkun muodostamisvaiheessa vektori $S(1)$ ei ole tiedossa. Siis salkun arvo tällöin on reaaliarvoinen satunnaismuuttuja. Hetkellä 1 salkku voidaan myydä hintaan $S(1,\omega)\theta$, missä ω kuvaa markkinoiden toteutunutta tilaa. Tällöin siis salkun arvo $S(1,\omega)\theta$ on tiedossa oleva reaaliluku.

5.1.1 Arbitraasi ja sen havaitseminen

Tarkastellaan arbitraasin käsitettä ja havaitsemista edellä kuvatuilla yhden periodin markkinoilla.

Määritelmä 5.1. Markkinoilla on *arbitraasimahdollisuus*, jos on olemassa salkku θ siten, että

$$\begin{aligned} S(0)\theta &\leq 0 \text{ ja} \\ S(1)\theta &\geq 0 \text{ m.v. ja } \mathbb{P}(S(1)\theta > 0) > 0. \end{aligned}$$

Markkinat ovat *arbitraasivapaat*, jollei niillä ole arbitraasimahdollisuutta.

Arbitraasimahdollisuus on ymmärrettävissä siten, että voidaan hankkia riskittömästi mahdollisuus voittoihin ilman alkuvarallisuutta. Markkinoilta vaaditaan yleisesti arbitraasivapautta.

Kysymys arbitraasivapaudesta ei ole yksinkertainen edes tässä tarkasteltavassa yhden periodin mallissa. Tyypillisesti arvopapereiden hinnat eivät ole toisistaan riippumattomia. Esimerkiksi osakkeen ja siihen liittyvän option hinnat riippuvat voimakkaasti toisistaan. Esitetään seuraavassa välttämättömät ja riittävät ehdot arbitraasivapaudelle.

Määritelmä 5.2. Satunnaismuuttujaa ϕ kutsutaan *hinnoittelijaksi* tai *deflaattoriksi*, jos $\mathbb{P}(\phi > 0) = 1$ ja

$$S_n(0) = \mathbb{E}(\phi S_n(1)), \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Äärellisessä tai numeroituvassa todennäköisyyskentässä hyödyllinen käsite on myös *tilahintavektori*. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$. Vektori

$$\psi = (\psi(\omega_1), \ldots, \psi(\omega_M)) \in \mathbb{R}^M$$

on tilahintavektori, jos ψ kuvauksena $\Omega \to \mathbb{R}$ on mitallinen, $\psi(\omega_m) > 0, \forall m$, ja

$$S_n(0) = \sum_{\omega \in \Omega} \psi(\omega) S_n(1, \omega), \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Olkoon Ω äärellinen. Oletetaan, että $\mathcal{F}$ kaikkien Ω:n osajoukkojen muodostama sigma-algebra ja että $\mathbb{P}(\omega_m) > 0, \forall m$. Näitä oletuksia ei voida pitää oleellisina rajoituksina äärellisen perusjoukon Ω tapauksessa (tarvittaessa todennäköisyyskenttä muutetaan vaaditunlaiseksi arvopapereiden jakaumat säilyttäen). Jos ψ on tilahintavektori, niin

$$\phi(\omega) = \psi(\omega)/\mathbb{P}(\omega)$$

määrittelee hinnoittelijan. Kääntäen, jos ϕ on hinnoittelija, niin

$$\psi(\omega) = \mathbb{P}(\omega)\phi(\omega)$$

määrittelee tilahintavektorin. Tilahintavektorit riippuvat vain vähän todennäköisyysmitasta $\mathbb{P}$ ja ovat siksi mukavia sovelluksissa.

Lause 5.1. *Edellä esitetty yhden periodin markkinamalli on arbitraasivapaa, jos ja vain jos on olemassa vähintään yksi hinnoittelija. Lisäksi hinnoittelija voidaan valita rajoitetuksi.*

Lausetta kutsutaan usein arbitraasihinnoittelun 1. päälauseeksi. Lause todistetaan seuraavassa vain äärellisen todennäköisyyskentän tapauksessa.

Koska $S_1(1) \equiv 1$ ja $S_1(0) = \frac{1}{1+i}$, pätee hinnoittelijalle

$$\frac{1}{1+i} = \mathbb{E}(\phi).$$

Voidaan siis määritellä todennäköisyysmitta Q ehdosta

$$Q(A) = (1+i)\mathbb{E}(\phi \mathbb{1}(A)), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} S_n(0) &= \int_\Omega \phi(\omega) S_n(1,\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \frac{S_n(1,\omega)}{1+i} dQ(\omega) := \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(1)}{1+i}\right). \end{aligned}$$

Tulos muistuttaa kohdassa 4 esitettyä traditionaalista menettelyä sovellettuna yhden periodin malliin. Odotusarvoa ei ole kuitenkaan määrätty 'fysikaalisen' todennäköisyysmitan suhteen. Diskonttaustekijä ei myöskään riipu tarkasteltavasta arvopaperista. Mahdolliset erot arvopapereiden riskillisyydessä eivät siis näy diskonttauksessa. Mittaa Q kutsutaankin *riskineutraaliksi todennäköisyysmitaksi*. Koska $\phi > 0$, ovat mitat $\mathbb{P}$ ja Q ekvivalentteja eli

$$\mathbb{P}(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Todetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat, jos ja vain jos on olemassa $\mathbb{P}$:n kanssa ekvivalentti todennäköisyysmitta Q kentällä $(\Omega, \mathcal{F})$, jolle

$$S_n(0) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(1)}{1+i}\right), \qquad n = 1, \dots, N.$$

Huomautus 5.1. Arbitraasin olemassaolo riippuu selvästikin vain satunnaisvektorin

$$(S_2(1), \dots, S_N(1))$$

jakaumasta. Tarvittaessa $\mathcal{F}$ voidaan aina typistää sigma-algebraksi

$$\mathcal{F}' = \sigma(S_2(1), \dots, S_N(1)).$$

Arbitraasi typistetyssä ympäristössä on ekvivalentti arbitraasin kanssa alkuperäisessä ympäristössä. Tunnetusti $\mathcal{F}'$-mitalliset funktiot ovat tyyppiä

$$f(S_2(1), \dots, S_N(1)), \tag{5.3}$$

missä $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ on Borel-mitallinen funktio. Toisaalta kaikki tällaiset funktiot ovat $\mathcal{F}'$-mitallisia. Erityisesti hinnoittelijan etsimisessä voidaan rajautua luokkaan (5.3).

Huomautus 5.2. Itse asiassa arbitraasi riippuu vektorin $(S_2(1), \dots, S_N(1))$ jakaumastakin vain melko vähän. Olkoon P mainittu jakauma. Jos P' on P:n kanssa ekvivalentti jakauma $\mathbb{R}^{N-1}$:n Borel-joukoilla, niin arbitraasin olemassaolo näiden kahden jakauman alaisuudessa on ekvivalenttia.

Ennen lauseen todistusta tarkastellaan joitakin esimerkkejä.

Esimerkki 5.1. Oletetaan, että markkinoilla on osake, jonka hinta hetkellä 0 on p. Oletetaan, että hetkellä 1 osakkeen arvo on α tai β, missä $0 < \alpha < \beta$. Olkoon tämä arvopaperi 2. Oletetaan siis, että

$$\mathbb{P}(S_2(1) = \alpha) > 0, \quad \mathbb{P}(S_2(1) = \beta) > 0 \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(S_2(1) = \alpha \text{ tai } \beta) = 1.$$

Bondia kuvaa arvopaperi, jonka arvo hetkellä 0 on 1 ja arvo hetkellä 1 myös 1. Siis $i = 0$. Olkoon tämä arvopaperi 1. Markkinoita voidaan kuvata kaaviolla:

	ω_1	ω_2
$S_1(1)$	1	1
$S_2(1)$	α	β

$$S_1(0) = 1, \quad S_2(0) = p$$

$$\begin{tikzcd} & \alpha \\ p \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \beta \end{tikzcd}$$

Millä p:n arvoilla markkinat ovat arbitraasivapaat?

Suoraan määritelmän 5.1 nojalla päätellään seuraavasti. Olkoon $(\theta_1, \theta_2)^T$ salkku ja

$$S(0)\theta = \theta_1 + p\theta_2 = 0.$$

Salkun arvon hetkellä 1 on

$$S(1)\theta = \theta_1 + \alpha\theta_2 \quad \text{tai} \quad \theta_1 + \beta\theta_2.$$

Olkoon aluksi $\theta_2 < 0$. Nyt $S(1)\theta \geq 0, \forall\omega$, jos ja vain jos $\theta_1+\beta\theta_2 \geq 0$. Tällöin $S(1,\omega_1)\theta > 0$, joten arbitraasi on löytynyt. Koska $\theta_1 = -p\theta_2$, niin arbitraasin löytyminen edellyttää, että

$$-p\theta_2 + \beta\theta_2 \geq 0$$

eli että $p \geq \beta$. Samantyyppisellä tarkastelulla todetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat, jos ja vain jos $p \in (\alpha, \beta)$.

Todennetaan tulos myös lauseen 5.1 avulla. On siis tutkittava, millä p:n arvoilla on olemassa aidosti positiiviset $\psi(\omega_1)$ ja $\psi(\omega_2)$ siten, että

$$\begin{cases} S_1(0) = 1 = \psi(\omega_1) + \psi(\omega_2), \\ S_2(0) = p = \alpha\psi(\omega_1) + \beta\psi(\omega_2). \end{cases}$$

Mahdollisia tilahintavektoreita ovat

$$\{\psi(\omega_1), 1 - \psi(\omega_1) | \psi(\omega_1) \in (0,1)\}.$$

Saadaan vaatimus

$$p \in \{\alpha\psi(\omega_1) + \beta(1 - \psi(\omega_1)) | \psi(\omega_1) \in (0,1)\} = (\alpha, \beta).$$

Kun p on annettu, on

$$\psi(\omega_1) = \frac{\beta - p}{\beta - \alpha}, \quad \psi(\omega_2) = \frac{p - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Jos $q \in (0,1)$ ja

$$\mathbb{P}(\omega_1) = q, \quad \mathbb{P}(\omega_2) = 1-q,$$

niin yksikäsitteinen hinnoittelija on

$$\phi(\omega_1) = \frac{\beta - p}{q(\beta-\alpha)}, \qquad \phi(\omega_2) = \frac{p-\alpha}{(1-q)(\beta-\alpha)}.$$

Esimerkki 5.2. Olkoot arvopaperit 1 ja 2 kuten esimerkissä 5.1. Oletetaan, että $p \in (\alpha, \beta)$, jolloin markkinat ovat arbitraasivapaat. Lisätään valikoimaan Eurooppalainen optio arvopaperiksi 3. Optio antaa oikeuden ostaa yhden kappaleen arvopaperia 2 sovittuun hintaan γ hetkellä 1. Oletetaan, että $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Sopimus tehdään hetkellä 0.

Optiossa ei ole ostovelvollisuutta. Option haltija käyttää oikeuttaan vain, jos

$$S_2(1) > \gamma.$$

Option arvo hetkellä 1 on nolla, jos $S_2(1) \le \gamma$ ja $S_2(1) - \gamma$, jos $S_2(1) > \gamma$. Jälkimmäinen ymmärretään siten, että hetkellä 1 ostetaan option mukainen osake hintaan γ ja myydään se saman tien hintaan $S_2(1)$.

Markkinoita kuvaa hetkellä 1 kaavio

	ω_1	ω_2
$S_1(1)$	1	1
$S_2(1)$	α	β
$S_3(1)$	0	$\beta - \gamma$.

Annetulla hinnalla p tilahintavektori esimerkissä 5.1 on

$$\psi(\omega_1) = \frac{\beta - p}{\beta - \alpha},$$
$$\psi(\omega_2) = \frac{p - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Jotta arbitraasivapaus säilyisi option lisäämisen jälkeenkin, on lauseen 5.1 nojalla oltava

$$\begin{aligned} S_3(0) &= \psi(\omega_1)\cdot 0 + \psi(\omega_2)\cdot(\beta-\gamma) \\ &= \frac{(p-\alpha)(\beta-\gamma)}{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Siis $S_3(0)$ määräytyy yksikäsitteisesti, kun muiden arvopapereiden hinnat on kiinnitetty.

Esimerkki 5.3. Olkoot markkinat kuten esimerkissä 5.1 ja $p \in (\alpha, \beta)$. Olkoon lisäksi $\mathbb{P}(\omega_1) = q$ ja $\mathbb{P}(\omega_2) = 1-q$, missä $q \in (0,1)$. Markkinat ovat siis arbitraasivapaat. Osakkeet ovat riskillisiä sijoituksia, joten kohdan 4 hengessä oletetaan lisäksi, että

$$p < \mathbb{E}(S_2(1)) = q\alpha + (1-q)\beta. \tag{5.4}$$

Tällöin

$$p = \frac{\mathbb{E}(S_2(1))}{1+i'} \qquad \text{eräälle } i' > 0.$$

Lisätään markkinoille arvopaperi 3, jonka arvo hetkellä 1 määräytyy ehdoista

$$S_3(1,\omega_1) = \beta, \quad S_3(1,\omega_2) = 0.$$

Esimerkin 5.1 nojalla markkinoiden hinnoittelijalle pätee

$$\phi(\omega_1) = \frac{\beta - p}{q(\beta-\alpha)}, \qquad \phi(\omega_2) = \frac{\beta-\alpha}{(1-q)(\beta-\alpha)}.$$

Jotta markkinat säilyisivät arbitraasivapaina, tulee olla

$$\begin{aligned} S_3(0) &= \phi(\omega_1)S_3(1,\omega_1)q + \phi(\omega_2)S_3(1,\omega_2)(1-q) \\ &= \frac{\beta(\beta-p)}{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Toisaalta $\mathbb{E}(S_3(1)) = q\beta$. Epäyhtälön (5.4) nojalla

$$q < \frac{\beta-p}{\beta-\alpha}.$$

Siis

$$S_3(0) = \frac{\beta(\beta-p)}{\beta-\alpha} > q\beta = \mathbb{E}(S_3(1)).$$

Arvopaperin 3 ostaminen on siis odotusarvomielessä tappiollista. Kohdassa 4 esitetty periaate ei sovi tilanteeseen. Jos olisi

$$S_3(0) = \frac{\mathbb{E}(S_3(1))}{1+i''}, \qquad i'' > 0,$$

markkinoilla olisi arbitraasi.

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan markkinamallia, jossa ensimmäisenä vuotena vuoden mittaisen talletuksen korko on vakio i_1 ja vuosina 2 ja 3 vuoden mittaisen talletuksen korot $\mathcal{I}_2$ ja $\mathcal{I}_3$ ovat stokastisia (talletuksia voidaan tehdä vain hetkinä 0, 1 ja 2). Arvopaperi 1 olkoon yhden, arvopaperi 2 kahden ja arvopaperi 3 kolmen vuoden nollakuponkibondi. Oletetaan, että korkorakenteen vuosikorot ovat vakioita, mutta vakio vaihtelee vuosittain. Tämä vastaa kohdassa 3.3 esitettyä mallia, jossa oli mahdollista konstruoida arbitraasi. Todennetaan sama asia lauseen 5.1 avulla. Arvopapreiden kehitys on seuraavan kaavion mukainen

Aika	k=0	k=1	k=2	k=3
$S_1(k)$	$\frac{1}{1+i_1}$	1		
$S_2(k)$	$\frac{1}{(1+i_1)^2}$	$\frac{1}{1+\mathcal{I}_2}$	1	
$S_3(k)$	$\frac{1}{(1+i_1)^3}$	$\frac{1}{(1+\mathcal{I}_2)^2}$	$\frac{1}{1+\mathcal{I}_3}$	1

Tarkastellaan arbitraasimahdollisuutta yhden periodin osamallissa. Pyritään siis määräämään positiivinen satunnaismuuttuja ϕ, jolle

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i_1} &= \mathbb{E}(\phi)\\ \frac{1}{(1+i_1)^2} &= \mathbb{E}\left(\frac{\phi}{1+\mathcal{I}_2}\right)\\ \frac{1}{(1+i_1)^3} &= \mathbb{E}\left(\frac{\phi}{(1+\mathcal{I}_2)^2}\right).\end{aligned}$$

Tällöin

$$Q(A) = (1+i_1)\mathbb{E}(\phi\mathbb{1}(A)), \quad A \in \mathcal{F},$$

määrittelee riskineutraalin todennäköisyysmitan. Merkitään

$$\frac{d\mathbb{P}}{dQ} = \frac{1}{(1+i_1)\phi}$$

(Radon-Nikodymin derivaatta). Nyt

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i_1} &= \mathbb{E}\left(\frac{(1+i_1)\phi}{1+\mathcal{I}_2}\right)\\ &= \mathbb{E}_Q\left(\frac{(1+i_1)\phi}{1+\mathcal{I}_2}\cdot\frac{d\mathbb{P}}{dQ}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{1}{1+\mathcal{I}_2}\right)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+i_1)^2} &= \mathbb{E}\left(\frac{(1+i_1)\phi}{(1+\mathcal{I}_2)^2}\right)\\ &= \mathbb{E}_Q\left(\frac{(1+i_1)\phi}{(1+\mathcal{I}_2)^2}\cdot\frac{d\mathbb{P}}{dQ}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{1}{(1+\mathcal{I}_2)^2}\right).\end{aligned}$$

Siis

$$\mathbb{E}_Q\left(\frac{1}{(1+\mathcal{I}_2)^2}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{1}{1+\mathcal{I}_2}\right)^2.$$

Tämä on mahdollista vain jos $\mathcal{I}_2$ on vakio Q-m.v. (jolloin sama pätee $\mathbb{P}$-m.v.). Mallissa on siis arbitraasimahdollisuus, jos $\mathcal{I}_2$ on aidosti stokastinen.

Esimerkki 5.5. Olkoon arvopaperi 1 nollakuponkibondi vuosikorolla i ja arvopaperi 2 osake, jonka arvolla $S_2(1)$ on jakauma

$$\mathbb{P}(S_2(1) \in B) = \int_B f(x)dx, \qquad B \in \mathcal{B},$$

missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \text{jos} \quad x \le 0, \\ f(x) &> 0, \quad \text{jos} \quad x > 0 \end{aligned}$$

ja

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1.$$

Siis f on arvon $S_2(1)$ tiheysfunktio. Olkoon osakkeen hinta $S_2(0) = p$. Markkinoilla on arbitraasi, jos $p \le 0$. Osoitetaan, että jos $p > 0$, niin markkinat ovat arbitraasivapaat.

Olkoon θ salkku, jolle

$$\frac{\theta_1}{1+i} + p\theta_2 = 0.$$

Jos $\theta_1 < 0$, niin $\theta_2 > 0$ ja

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\theta S(1) < 0) = \mathbb{P}(\theta_1 + \theta_2 S_2(1) < 0) \\ = \; & \mathbb{P}\left(S_2(1) < -\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \int_0^{-\theta_1/\theta_2} f(x)dx > 0. \end{aligned}$$

Jos taas $\theta_1 > 0$, niin $\theta_2 < 0$ ja

$$\mathbb{P}(\theta S(1) < 0) = \mathbb{P}\left(S_2(1) > -\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \int_{-\theta_1/\theta_2}^\infty f(x)dx > 0.$$

Jos $\theta_1 = 0$, ei myöskään saada riskitöntä mahdollisuutta voittoon. Siis markkinat ovat arbitraasivapaat aina, kun $p > 0$.

Todistetaan sama lauseen 5.1 avulla. Arbitraasinäkökulmasta voidaan tarkastella erikoistapausta, jossa

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x > 0,$$

missä $\mu > 0$ on vakio. Kaikki esimerkin mukaiset todennäköisyysmitat ovat nimittäin ekvivalentteja. Tarkastellaan tyyppiä $\phi(\omega) = g(S_2(1, \omega))$ olevia hinnoittelijaehdokkaita, missä $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on mitallinen funktio. Tällöin

$$\mathbb{E}(\phi) = \int_0^\infty g(x)f(x)dx$$

ja

$$\mathbb{E}(\phi S_2(1)) = \int_0^\infty x g(x) f(x) dx.$$

Osoitetaan, että hinnoittelijaksi voidaan valita tyyppiä $\phi = g(S_2(1))$ oleva satunnaismuuttuja, missä

$$g(x) = ae^{bx}$$

ja $a > 0$ ja $b < \mu$ ovat vakioita. Selvästi

$$\mathbb{E}\left(e^{tS_2(1)}\right) = \frac{\mu}{\mu - t}, \quad t < \mu,$$

ja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi) &= a\mathbb{E}\left(e^{bS_2(1)}\right) \\ &= \frac{a\mu}{\mu - b}.\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi S_2(1)) &= a\mathbb{E}\left(S_2(1)e^{bS_2(1)}\right) \\ &= a\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}\left(e^{tS_2(1)}\right)_{|t=b} \\ &= \frac{a\mu}{(\mu - b)^2}.\end{aligned}$$

Hinnoittelija on löytynyt, jos voidaan määrätä sellaiset $a > 0$ ja $b < \mu$, että

$$\frac{a\mu}{\mu - b} = \frac{1}{1+i}$$

ja

$$\frac{a\mu}{(\mu - b)^2} = p.$$

Näin on, kun

$$a = \frac{1}{\mu p(1+i)^2} \quad \text{ja} \quad b = \mu - \frac{1}{p(1+i)}.$$

Siirrytään nyt lauseen 5.1 todistukseen. Hyödynnetään seuraavaa aputulosta.

Lemma 5.2. *(versio Hahn-Banachin erottelulauseesta) Olkoon $\mathbb{R}^n$ tavallinen euklidinen avaruus ja A ja B erillisiä, ei-tyhjiä ja konvekseja $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja. Olkoon edelleen A kompakti ja B suljettu. Silloin on olemassa lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$f(x) < \gamma \leq f(y), \qquad \forall x \in A, y \in B. \tag{5.6}$$

Todistus. Kts. Rudin (1974), luku 3, tai Rockafellar (1970), lause 11.2. □

Seuraus 5.3. *Olkoon $V \subseteq \mathbb{R}^n$ lineaariavaruus. Merkitään*

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0, \forall j\}.$$

Oletetaan, että $V \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\}$. Silloin on olemassa sellainen vektori $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, että $z_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, ja

$$z \cdot x = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j = 0, \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in V. \tag{5.7}$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $V \neq \{0\}$. Olkoon

$$e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

vektori, jonka j. komponentti $= 1$. Tällöin $e_j \notin V$. Olkoon

$$A = \{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n | \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}.$$

Tällöin A on konveksi ja kompakti. Lisäksi

$$\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq A \quad \text{ja} \quad A \cap V = \emptyset.$$

Valitaan tämä A ja $B = V$ lemmassa 5.2. Olkoot f ja γ lemman mukaisia. Lineaarisuuden nojalla voidaan määrätä sellaiset $z'_1, \ldots, z'_n \in \mathbb{R}$, että

$$f(x) = z'_1 x_1 + \cdots + z'_n x_n, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Jos $y \in V$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, niin $\alpha y \in V$ ja $f(\alpha y) = \alpha f(y)$. Jos olisi $f(y) \neq 0$, niin saataisiin ristiriita epäyhtälön (5.6) kanssa. Siis $f(y) = 0, \forall y \in V$, ja $\gamma \leq 0$. Valitaan $x = e_j \in A$. Tällöin

$$f(e_j) = z'_j < \gamma \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Siis $z'_j < 0$ ja (5.7) toteutuu, kun valitaan $z_j = -z'_j$. □

Todistus. (Lause 5.1) Oletetaan todistuksessa, että Ω on äärellinen, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$. Ilman oleellista rajoitusta voidaan olettaa, että $\{\omega_m\} \in \mathcal{F}$ ja $\mathbb{P}(\omega_m) > 0$, $m = 1, \ldots, M$.

Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Kuvataan jokainen salkku $\theta \in \mathbb{R}^N$ vektoriksi $L(\theta)$,

$$\theta \to L(\theta) = (-S(0)\theta, S(1, \omega_1)\theta, \ldots, S(1, \omega_M)\theta) \in \mathbb{R}^{M+1}.$$

Tässä siis

$$S(1, \omega_m)\theta = \sum_{n=1}^{N} S_n(1, \omega_m)\theta_n$$

on salkun arvo hetkellä 1 tilassa ω_m, $m = 1, \ldots, M$. Koska L on lineaarinen, on kuvajoukko $V := L\left(\mathbb{R}^N\right)$ avaruuden $\mathbb{R}^{M+1}$ aliavaruus. Arbitraasivapauden nojalla

$$V \cap \mathbb{R}_+^{M+1} = \{0\}.$$

Seurauksen 5.3 nojalla on olemassa sellaiset $z_0, z_1, \ldots, z_M > 0$, että

$$-z_0 S(0)\theta + z_1 S(1, \omega_1)\theta + \cdots + z_M S(1, \omega_M)\theta = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^N.$$

Valitaan $\theta = e_n, n \in \{1, \ldots, N\}$. Saadaan

$$-z_0 S_n(0) + z_1 S_n(1, \omega_1) + \cdots + z_M S_n(1, \omega_M) = 0.$$

Nähdään, että

$$\psi(\omega_m) = z_m/z_0, \quad m = 1, \dots, M,$$

määrittelee tilahintavektorin.

Oletetaan nyt, että tilahintavektori ψ on olemassa. Olkoon $\theta \in \mathbb{R}^N$ sellainen salkku, että

$$S(1, \omega_m)\theta \geq 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

ja $S(1, \omega_m)\theta > 0$ jollain m. Tällöin

$$\begin{aligned} S(0)\theta &= \sum_{n=1}^{N} S_n(0)\theta_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\omega \in \Omega} \psi(\omega) S_n(1, \omega) \right) \theta_n \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \psi(\omega) S(1, \omega)\theta > 0. \end{aligned}$$

□

5.1.2 Täydellisyys

Olkoon markkinoita kuvaava malli kuten kohdassa 5.1. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Olkoon ϕ jokin hinnoittelija.

Olkoon X mielivaltainen satunnaismuuttuja todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tulkitaan X seuraavassa uuden arvopaperin hetken 1 arvoksi. Olkoon tämän hetken 0 hinta $V^X(0)$. Arbitraasivapausvaatimus ulotetaan myös uuteen arvopaperiin. Tämä asettaa rajoituksia hinnalle $V^X(0)$. Olemassaolevien arvopapereiden hintoja ei asetelmassa muuteta.

Sanotaan, että X pystytään *toistamaan*, jos on olemassa sellainen salkku $\theta \in \mathbb{R}^N$, että

$$X(\omega) = S(1, \omega)\theta \quad \text{m.v.} \tag{5.8}$$

Lause 5.4. *Jos salkku θ toistaa satunnaismuuttujan X, niin arbitraasivapailla markkinoilla*

$$\begin{aligned} V^X(0) &= S(0)\theta \\ &= \mathbb{E}\left(\phi X\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Todistus. Selvää on, että arbitraasi syntyy, jos X:n hetken 0 hinta eroaa toistavan salkun hinnasta. Yhtälö (5.9) todetaan oikeaksi lauseen 5.1 avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} V^X(0) &= \sum_{n=1}^N S_n(0)\theta_n \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(\phi S_n(1)\theta_n) \\ &= \mathbb{E}\left(\phi \sum_{n=1}^N S_n(1)\theta_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\phi X\right). \end{aligned}$$

□

Nähdään myös, että syntyvät laajennetut markkinat todella ovat arbitraasivapaat, jos niille lisätään toistettavissa oleva X ja hinta määrätään kaavan (5.9) mukaisesti. Nimittäin alkuperäinen ϕ on hinnoittelija myös laajennetuilla markkinoilla.

Määritelmä 5.3. Markkinat ovat *täydelliset*, jos jokainen satunnaismuuttuja X todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pystytään toistamaan.

Lause 5.5. *Kohdan 5.1 mukaiset markkinat ovat arbitraasivapaat ja täydelliset, jos ja vain jos on olemassa täsmälleen yksi hinnoittelija siinä mielessä, että jos ϕ_1 ja ϕ_2 ovat hinnoittelijoita, niin $\phi_1 = \phi_2$ m.v.*

Lausetta kutsutaan arbitraasihinnoittelun 2. päälauseeksi. Esitetään todistus vain äärellisen todennäköisyyskentän tapauksessa. Oletetaan ilman oleellista rajoitusta, että $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ ja $\mathbb{P}(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$.

Todistus. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$. Tarkastellaan matriisia

$$S(1) = \begin{pmatrix} S_1(1,\omega_1) & \ldots & S_N(1,\omega_1) \\ \vdots & & \\ S_1(1,\omega_M) & \ldots & S_N(1,\omega_M) \end{pmatrix}.$$

Oletetaan, että markkinat ovat täydelliset ja arbitraasivapaat. Lauseen 5.1 nojalla tilahintavektoreita on vähintään yksi. Sopimus e_m,

$$e_m(\omega) = 1(\omega = \omega_m), \quad \omega \in \Omega,$$

pystytään toistamaan. Siis on olemassa salkku θ, jolle

$$S(1)\theta = \begin{pmatrix} S_1(1,\omega_1)\theta_1 + \cdots + S_N(1,\omega_1)\theta_N \\ \vdots \\ S_1(1,\omega_M)\theta_1 + \cdots + S_N(1,\omega_M)\theta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kaavan pystyvektorin m. komponentti on 1. Nähdään, että $S(1)$:llä on vähintään M lineaarisesti riippumatonta saraketta. On siis oltava $N \geq M$ ja $S(1)$:llä on tasan M lineaarisesti riippumatonta saraketta. Rajoituksetta nämä ovat M ensimmäistä. Merkitään näiden muodostamaa neliömatriisia symbolilla $\bar{S}(1)$. Olkoon

$$\bar{S}(0) = (S_1(0), \ldots, S_M(0))^T.$$

Olkoot ψ_1 ja ψ_2 tilahintavektoreita. Tällöin

$$\bar{S}(0)^T = \psi_1 \bar{S}(1) = \psi_2 \bar{S}(1),$$

missä ψ_1 ja ψ_2 tulkitaan luonnollisella tavalla vaakavektoreiksi. Koska $\bar{S}(1)$ on kääntyvä, on välttämättä $\psi_1 = \psi_2$. Siis hinnoittelijoita on tasan yksi.

Oletetaan nyt, että on olemassa tasan yksi tilahintavektori ψ. Lauseen 5.1 nojalla markkinat ovat arbitraasivapaat. Olkoon K matriisin $S(1)$ maksimaalinen lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden määrä. Tällöin siis $K \leq M$. Oletetaan, että olisi $K < M$. Muodostetaan markkinat, joiden K ensimmäistä arvopaperia vastaavat mainittuja K:ta lineaarisesti riippumatonta saraketta ja arvopaperit $K+1, \ldots, M$ ovat kopioita K. sarakkeesta. Näin siis saadaan eräs markkinoita kuvaava neliömatriisi $\bar{S}(1)$, joka ei ole kääntyvä. Arvopapereiden hetken 0 hinnat otetaan alkuperäisiltä markkinoilta. Kuvatkoon näitä vektori $\bar{S}(0)$. Uusilla markkinoilla ψ on eräs tilahintavektori. Ryhmällä

$$Y\bar{S}(1) = (0, \ldots, 0), \qquad Y = (y_1, \ldots, y_M) \in \mathbb{R}^M,$$

on muitakin kuin triviaali ratkaisu. Jos $Y_0 = (y_1^0, \ldots, y_M^0)$ on tällainen, niin samoin on λY_0, missä $\lambda \neq 0$ on mielivaltainen. Valitaan λ siten, että

$$\psi(\omega_m) + \lambda y_m^0 > 0, \quad m = 1, \ldots, M.$$

Tällöin

$$(\psi + \lambda Y_0)\, \bar{S}(1) = \psi \bar{S}(1) = S(0)^T.$$

Siis myös $\psi + \lambda Y_0$ on tilahintavektori. Tämä on tilahintavektori myös alkuperäisillä markkinoilla. Saatiin ristiriita, joten $K = M$. Nämä M saraketta virittävät koko avaruuden $\mathbb{R}^M$, joten markkinat ovat täydelliset. □

Huomautus 5.3. Jos Ω on numeroituva,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\omega_m) > 0,\ \forall m,$$

markkinat eivät ole täydelliset. Nimittäin arvopapereiden $1, \ldots, N$ generoimat sopimukset muodostavat korkeintaan N-ulotteisen lineaariavaruuden

$$\{\theta_1 S_1(1) + \cdots + \theta_N S_N(1) | \theta_1, \ldots, \theta_N \in \mathbb{R}\}.$$

Toisaalta indikaattorimuuttujat $1(\omega = \omega_1), \ldots, 1(\omega = \omega_{N+1})$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja generoivat $(N+1)$-ulotteisen avaruuden.

Täydellisillä markkinoilla kaikki sopimukset hinnoitellaan kaavan (5.9) mukaisesti. Lähtökohtana ovat hinnat $S_1(0), \ldots, S_N(0)$ sopiville arvopapereille, jolloin muiden sopimusten hinnat määräytyvät yksikäsitteisesti. 'Perusarvopapereiden' $1, \ldots, N$ hintojen määräytymiseen ei asetelmassa oteta juurikaan kantaa.

Oletetaan nyt, että markkinat eivät ole täydelliset. Olkoon lisäksi X sellainen, että (5.8) ei toteudu millään salkulla θ. Arbitraasivapaus säilyy, jos X hinnoitellaan jollain hinnoittelijalla kaavan (5.9) mukaisesti. Tämä seuraa lauseesta 5.1. Hinnoittelijoita on nyt kuitenkin useita. Olkoot ϕ_1 ja ϕ_2 tällaisia, jolloin siis

$$S_n(0) = \mathbb{E}(\phi_j S_n(1)), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Nyt voi hyvin olla

$$\mathbb{E}\left(\phi_1 X\right) \neq \mathbb{E}\left(\phi_2 X\right).$$

Selvää on, että hinnan tulee kuulua välille $\left[\underline{V}^X(0), \overline{V}^X(0)\right]$, missä

$$\begin{aligned}
\underline{V}^X(0) &= \inf\{\mathbb{E}\left(\phi X\right) | \phi \text{ alkuperäisten markkinoiden hinnoittelija}\}, \\
\overline{V}^X(0) &= \sup\{\mathbb{E}\left(\phi X\right) | \phi \text{ alkuperäisten markkinoiden hinnoittelija}\}.
\end{aligned}$$

Hinta ei määräydy yksikäsitteisesti pelkästään arbitraasivapausvaatimuksen perusteella. Yksikäsitteisyyden saavuttamiseksi tai mahdollisten hintojen joukon supistamiseksi on markkinoiden kuvausta täsmennettävä.

5.1.3 Salkun valintaongelma

Olkoon markkinoita kuvaava malli kuten kohdassa 5.1 ja olkoon sijoittajalla hetkellä 0 alkupääoma $V(0)$. Sijoitetaan tämä kokonaisuudessaan markkinoille hankkimalla salkku $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^T$. Tällöin on oltava $S(0)\theta = V(0)$. Varallisuus $V(1)$ hetkellä 1 on

$$V(1) = S(1)\theta.$$

Tarkastellaan kysymystä, miten salkku kannattaisi valita.

Kysymykseen ei ole yksikäsitteistä vastausta, vaan se riippuu käytetystä valintakriteeristä. Voitaisiin esimerkiksi pyrkiä maksimoimaan $\mathbb{E}(V(1))$ asettaen yläraja varallisuuden $V(1)$ varianssille. Tätä näkökulmaa tarkastellaan kohdassa 8.

Tarkastellaan seuraavassa asiaa utiliteettiteorian näkökulmasta. Oletetaan, että sijoittaja mittaa varallisuuden hyötyä *utiliteettifunktion* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avulla. Täsmällisesti, salkun $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^T$ valinta antaa *hyödyn*

$$\mathbb{E}\left(u(S(1)\theta)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(\sum_{n=1}^{N} S_n(1)\theta_n\right)\right). \tag{5.10}$$

Utiliteetin odotusarvohypoteesin mukaan toimija pyrkii maksimoimaan hyötynsä. Tavoitteena on siis maksimoida (5.10) yli kaikkien salkkujen θ, jotka toteuttavat vaatimuksen $S(0)\theta = V(0)$.

Oletetaan, että utiliteettifunktio on konkaavi, aidosti kasvava ja jatkuvasti derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä. Konkaavin utiliteettifunktion omaavaa toimijaa kutsutaan *riskin kaihtajaksi.* Oletetaan myös, että $S_n(0) > 0$ kaikilla $n = 1, \ldots, N$ ja että $V(0) > 0$.

Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} S_n(1)\theta_n &= \sum_{n=1}^{N} S_n(0)\frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)}\theta_n + V(0) \\
&= V(0)(1 + \sum_{n=1}^{N} w_n R_n),
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{S_n(0)\theta_n}{V(0)}, \\
R_n &= \frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)}.
\end{aligned}$$

Tulkinnallisesti w_n kuvaa suhteellista arvopaperiin n sijoitettavaa rahamäärää ja R_n on arvopaperin n *tuottoaste*. Salkun valintaongelma voidaan nyt esittää muodossa

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(u\left(V(0)\left(1 + \sum_{n=1}^{N} w_n R_n\right)\right)\right) = \max! \\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1. \end{cases}$$

Tämä voidaan esittää myös rajoittamattomana optimointitehtävänä:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(u\left(V(0)\left(1 + i + \sum_{n=2}^{N} w_n (R_n - i)\right)\right)\right) = \max! \\ w_2, \ldots, w_N \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Yleisin säännöllisyysoletuksin välttämätöntä pisteen $w_2, \ldots, w_N$ optimaalisuudelle on, että

$$\mathbb{E}\left(u'\left(V(0)\left(1+i+\sum_{n=2}^{N} w_n(R_n-i)\right)\right)(R_n-i)\right)=0, \quad n=2,\ldots,N.$$

5.1.4 Keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuva suojautuminen

Olkoon markkinoita kuvaava malli kuten kohdassa 5.1. Olkoon X mielivaltainen satunnaismuuttuja kentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tulkitaan nyt $X(\omega)$ sijoittajan maksamaksi rahamääräksi hetkellä 1, jos ω toteutuu. Tämä on luontevaa ajatella sitoumukseksi tai sopimukseen perustuvaksi stokastiseksi velaksi.

Sijoittajan intressinä on hankkia hetkellä 0 salkku, joka mukailee sopivasti vuoden päästä maksettavaa rahamäärää X. Tällöin tavoitteena on usein suojautua tulevilta tappioilta (ainakin osittain) eli pienentää riskiä hetkellä 1. Voidaan myös ajatella, että sijoittaja yhteensovittaa varojaan ja velkojaan (jolloin puhutaan ALM:stä, Asset Liability Management). Sijoittaja voi myös olla velvollinen varautumaan hetkellä 0 hetkellä 1 tapahtuvaan suoritukseen sopivalla rahasummalla. Tuleva suoritus joudutaan siis arvostamaan.

Jos X on toistettavissa, voi sijoittaja vapautua kaikesta riskistä hankkimalla hetkellä 0 toistavan salkun. Salkun hetken 0 hintaa voidaan pitää myös perusteltuna hintana X:lle.

Oletetaan nyt, että X ei ole toistettavissa. Tällöin sopimukseen liittyvää riskiä ei pystytä eliminoimaan täydellisesti. Riskiin voidaan kuitenkin vaikuttaa muodostamalla hetkellä 0 salkku, joka sopivasti approksimoi X:ää. Olkoon tämä θ. Luonnollista on vaatia, että X on suojattava salkulla, jolle pätee

$$\mathbb{E}(S(1)\theta) \geq \mathbb{E}\,(X) \tag{5.11}$$

tai tarkasti

$$\mathbb{E}(S(1)\theta) = \mathbb{E}\,(X)\,. \tag{5.12}$$

Varman suojauksen antaa salkku, jolle

$$S(1)\theta \geq X \qquad \text{m.v.} \tag{5.13}$$

Tarkastelemalla ehdon (5.13) täyttäviä salkkuja ja niiden hetken 0 hintoja saadaan käsitys minimaalisesta kustannuksesta, jolla X pystytään aina suojaamaan.

Otetaan salkun valintakriteeriksi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left((X - S(1)\theta)^2\right) \tag{5.14}$$

minimointi. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että markkinoilla on vain vuoden nollakuponkibondi (arvopaperi 1) ja yksi riskillinen arvopaperi (arvopaperi 2). Olkoon lisäksi bondin vuosikorko $i = 0$. On siis valittava θ_1 ja θ_2 siten, että

$$\mathbb{E}\left((X - \theta_1 - \theta_2 S_2(1))^2\right) \tag{5.15}$$

minimoituu. Tunnetusti minimi saavutetaan valitsemalla $\theta_1 = \theta_1^*$, $\theta_2 = \theta_2^*$, missä

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \mathbb{E}(X) - \theta_2^* \mathbb{E}(S_2(1)), \\ \theta_2^* &= \frac{\mathrm{Cov}(X, S_2(1))}{\mathrm{Var}(S_2(1))}. \end{aligned}$$

5.2 Monen periodin malli

Tarkastellaan edelleen luvun 5 alussa esitettyä mallia. Sallitaan nyt kaupankäynti hetkinä $0, 1, \ldots, T-1$. Hetkellä T todetaan salkun arvo myymällä kaikki hallussa olevat arvopaperit. Tällöin puhutaan salkun *realisoimisesta.*

Hetkellä $k \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ sijoittaja tuntee kaikkien arvopapereiden toteutuneet hinnat ajanhetkinä $0, 1, \ldots, k$. Lisäksi saattaa olla käytössä muutakin tulevaisuuden näkymiin vaikuttavaa informaatiota. Myynti- ja ostopäätökset tehdään tämän informaation perusteella. Matemaattisesti asia kuvataan $\mathcal{F}$:n alisigma-algebroilla. Hetkellä k käytössä olevaa informaatiota kuvaa sigma-algebra $\mathcal{F}_k$. Oletetaan, että

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\phi, \Omega\}, \qquad \mathcal{F}_T = \mathcal{F} \text{ ja} \\ \mathcal{F}_0 &\subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T. \end{aligned}$$

Alisigma-algebrajonoa $\{\mathcal{F}_k | k = 0, 1, \ldots, T\}$ kutsutaan *historiaksi.* Konstruktiosta syntyy *stokastinen kenttä*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}), \quad \mathbb{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T).$$

Stokastinen prosessi $\{X(k) | k = 0, 1, \ldots, T\}$ kentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on *sopiva*, jos $X(k)$ on $\mathcal{F}_k$-mitallinen, $k = 0, 1, \ldots, T$. Vektoriarvoista prosessia

$$\{X(k) | k = 0, 1, \ldots, T\}, \quad X(k) = (X_1(k), \ldots, X_N(k)),$$

sanotaan sopivaksi, jos kaikki komponentit ovat sopivia. Erityisesti

$$\{S(k) | k = 0, 1, \ldots, T\}, \quad S(k) = (S_1(k), \ldots, S_N(k)),$$

oletetaan aina sopivaksi. Tulkinta on, että hinnat $S_n(j)$ ovat tiedossa hetkellä k kaikilla $j \leq k, n = 1, \ldots, N$.

Strategia $\{\theta(k) | k = 1, \ldots, T\}$,

$$\theta(k) = (\theta_1(k), \ldots, \theta_N(k))^T,$$

määritellään prosessina, jolle

$$\theta_n(k) \text{ on } \mathcal{F}_{k-1}\text{-mitallinen}, \quad k = 1, \ldots, T, \ n = 1, \ldots, N.$$

Komponentti $\theta_n(k)$ tulkitaan arvopaperin n lukumääräksi hetkellä $k-1$. Arvopaperit siis hankitaan hetkellä $k-1$, joten on luonnollista vaatia $\mathcal{F}_{k-1}$-mitallisuus. Hankittua salkkua pidetään yksi vuosi, minkä jälkeen sitä voidaan taas muuttaa. Salkun arvo hetkellä k periodin $[k-1,k)$ lopussa on

$$V(k) = S(k)\theta(k).$$

Hetkellä 0 salkun arvo on erityisesti $S(0)\theta(1)$. Kohdassa 5.1 merkittiin lyhyesti $\theta = \theta(1)$.

Edellä siis hetkellä 0 muodostetaan salkku $\theta(1)$, joka on deterministinen. Hetkellä 1 muodostetaan salkku $\theta(2)$, joka perustuu hetken 1 informaatioon jne.

Oletetaan seuraavassa, että arvopaperi 1 vastaa vaihtuvakorkoista pankkitiliä. Matemaattisesti

$$\begin{cases} S_1(0) = 1, \\ S_1(k) = (1+\mathcal{I}(1))\cdots(1+\mathcal{I}(k)), \quad k = 1,\ldots,T, \end{cases}$$

missä $\mathcal{I}(j) = \mathcal{F}_{j-1}$-mitallinen eli on tiedossa salkun $\theta(j)$ muodostamisvaiheessa. Oletetaan, että $\mathcal{I}(j) \geq 0$ m.v. kaikilla j.

Kunakin hetkenä k sijoittaja voi siis vaihtaa salkkunsa. Strategiaa $\{\theta(k)\}$ sanotaan *omavaraiseksi*, jos

$$V(k) = S(k)\theta(k) = S(k)\theta(k+1), \quad k = 1,\ldots,T-1.$$

Tällöin uusi salkku muodostetaan käyttäen vain strategian aiemmin synnyttämää varallisuutta.

Oletetaan tässä kappaleessa, että

$$\mathcal{F}_k = \sigma\left(S_n(j),\, j \leq k,\, n = 1,\ldots,N\right),$$

joten $\mathcal{F}_k$ on suppein sigma-algebra, jossa vektorit $S(1),\ldots,S(k)$ ovat mitallisia. Stokastista prosessia $\{X|k = 0,1,\ldots,T\}$ kutsutaan *martingaaliksi*, jos $\{X(k)\}$ on sopiva, $\mathbb{E}\left(|X(k)|\right) < \infty, \forall k$, ja

$$\mathbb{E}\left(X(k)|\mathcal{F}_{k-1}\right) = X(k-1),\ \forall k.$$

Edellä todennäköisyysmitta on alkuperäinen $\mathbb{P}$. Hyödyllistä seuraavassa on tutkia martingaaleja $\mathbb{P}$:n kanssa ekvivalenttien todennäköisyysmittojen suhteen. Aiempaan tapaan mitat $\mathbb{P}$ ja Q ovat ekvivalentit, jos

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0, \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Jos Q on tällainen ja $\mathbb{E}_Q\left(|X(k)|\right) < \infty, \forall k$, sekä

$$\mathbb{E}_Q\left(X(k)|\mathcal{F}_{k-1}\right) = X(k-1),\ \forall k,$$

sanotaan, että $\{X(k)\}$ on Q-martingaali.

5.2.1 Arbitraasi monen periodin mallissa

Arbitraasin käsite on mutkikkaampi monen periodin mallissa, koska sijoittajalla on nyt mahdollisuus operoida markkinoilla useina hetkinä.

Määritelmä 5.4. Markkinoilla on *arbitraasimahdollisuus*, jos on olemassa sellainen omavarainen strategia $\{\theta(k)\}$, että

$$\begin{cases} S(0)\theta(1) \le 0, \\ S(T)\theta(T) \ge 0 \text{ m.v. ja } \mathbb{P}(S(T)\theta(T) > 0) > 0. \end{cases}$$

Markkinat ovat *arbitraasivapaat*, ellei nillä ole arbitraasimahdollisuutta.

Arbitraasin tulkinta on sama kuin yhden periodin mallissa.

Lause 5.6. *Markkinat ovat arbitraasivapaat, jos ja vain jos on olemassa $\mathbb{P}$:n kanssa ekvivalentti todennäköisyysmitta Q siten, että diskontattu hintaprosessi $\{X_n(k), k = 0, 1, \ldots, T\}$,*

$$X_n(k) = \frac{S_n(k)}{(1 + \mathcal{I}(1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(k))}, \tag{5.16}$$

on Q-martingaali kaikilla $n = 1, \ldots, N$.

Mittaa Q kutsutaan nytkin riskineutraaliksi todennäköisyysmitaksi tai martingaalimitaksi. Hinnoittelu tapahtuu nyt kaavalla

$$S_n(0) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(T)}{(1 + \mathcal{I}(1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(T))}\right). \tag{5.17}$$

Arvopaperin n arvolla hetkellä k on esitys

$$S_n(k) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(T)}{(1 + \mathcal{I}(k+1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(T))} \,\middle|\, \mathcal{F}_k\right). \tag{5.18}$$

Esitetään lauseen 5.6 todistus vain äärellisen todennäköisyyskentän $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ tapauksessa. Ilman oleellista rajoitusta voidaan olettaa, että $\mathcal{F}_T$ sisältää kaikki Ω:n osajoukot ja että $\mathbb{P}(\omega) > 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Rajoitetaan tarkastelu lisäksi kahteen periodiin olettamalla, että $T = 2$.

Kirjoitetaan

$$\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_r,$$

missä $A_1, \ldots, A_r$ ovat $\mathcal{F}_1$-mitallisia, erillisiä ja ei-tyhjiä Ω:n osajoukkoja. Valitaan $A_1, \ldots, A_r$ vielä minimaalisiksi siten, että $A_j \neq \emptyset, \forall j$, ja

$$B \subseteq A_j,\ B \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow B = \emptyset \text{ tai } B = A_j.$$

Tällöin $\mathcal{F}_1$-mitalliset satunnaismuuttujat ovat muotoa

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j 1(\omega \in A_j),$$

missä $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. Tämä koskee oletusten nojalla muuttujia $S_n(1)$ ja $\theta_n(2)$. Erityisesti $S_n(1)$ on vakio joukossa A_j, $n = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, r$. Merkitään yhteistä arvoa symbolilla $S_n(1, A_j)$. Siis

$$S_n(1, \omega) = S_n(1, A_j), \quad \forall \omega \in A_j.$$

Arbitraasin olemassaolo monen periodin mallissa palautuu olleellisesti ottaen arbitraasin olemassaoloon peräkkäisissä yhden periodin malleissa. Tarkastellaan yhden periodin markkinoita hetkellä 1 ehdolla, että ollaan joukossa A_j. Arvopapereita on edelleen N kappaletta. Arvopaperin n hinta hetkellä 1 on $S_n(1, A_j)$ ja arvo hetkellä 2 $S_n(2, \omega)$ kaikilla $\omega \in A_j$. Taustalle ajatellaan todennäköisyyskenttä

$$(A_j, \mathcal{H}_j, \mathbb{P}_j),$$

missä $\mathcal{H}_j$ sisältää muotoa

$$B \cap A_j, \quad B \in \mathcal{F}_2,$$

olevat joukot eli itse asiassa kaikki A_j:n osajoukot. Todennäköisyysmitta $\mathbb{P}_j$ määritellään ehdosta

$$\mathbb{P}_j(\omega) = \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(A_j)}, \quad \omega \in A_j.$$

Kutsutaan tätä malliksi M_j. Olkoon M_0 vielä aikaväliä $[0, 1]$ vastaava yhden periodin malli. Arvopaperit ja niiden hinnat hetkellä 0 ja 1 otetaan alkuperäisiltä markkinoilta, samoin todennäköisyyskenttä $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$.

Lemma 5.7. *Edellä esitetty kahden periodin malli on arbitraasivapaa, jos ja vain jos kaikki yhden periodin mallit $M_0, M_1, \ldots, M_r$ ovat arbitraasivapaita.*

Todistus. Oletetaan ensin, että jossain mallissa M_j on arbitraasimahdollisuus. Jos tämä on M_0, tehdään arbitraasi 1. periodilla ja sijoitetaan syntyneet varat bondiin. Tämä on arbitraasistrategia 2 periodin mallissa. Jos $j \geq 1$, ei tehdä mitään hetkellä 0. Jos hetkellä 1 ollaan joukossa A_j, hankitaan tätä vastaava arbitraasisalkku mallissa M_j ja sijoitetaan mahdolliset ylimääräiset varat bondiin. Saatiin jälleen arbitraasi kahden periodin mallissa.

Oletetaan nyt, että kahden periodin mallissa on arbitraasimahdollisuus. Olkoon $\{\theta(k)\}$ arbitraasistrategia. Tehdään vastaoletus: kaikki mallit M_j, $j = 0, 1, \ldots, r$ ovat arbitraasivapaat. Nyt $S(1)\theta(1)$ on vakio joukossa A_j. Oletetaan, että olisi

$$S(1)\theta(1) < 0, \quad \forall \omega \in A_j,$$

eräälle $j \in \{1, \dots, r\}$. Silloin mallissa M_j on arbitraasi. Voitaisiin nimittäin sijoittaa varallisuus $S(1)\theta(1)$ oletetun arbitraasistrategian mukaisesti. Hetkellä 2 varat ovat $S(2)\theta(2)$, mikä on aina ei-negatiivinen. Tästä seuraa arbitraasi mallissa M_j. On siis oltava

$$S(1)\theta(1) \geq 0, \qquad \forall \omega \in A_j,\ \forall j.$$

Koska M_0 on arbitraasivapaa, on $S(1)\theta(1) = 0$ m.v. Siis myös $S(1)\theta(2) = 0$ m.v. Myös $\theta(2)$ on vakiovektori jokaisessa joukossa A_j. Koska $M_1, \dots, M_r$ ovat arbitraasivapaita, on joko $S(2)\theta(2) = 0$ m.v. tai $\mathbb{P}(S(2)\theta(2) < 0) > 0$. Saatiin jälleen ristiriita. $\square$

Lemma 5.8. *Olkoon $Q^{(1)}$ riskineutraali todennäköisyysmitta mallissa M_0. Siis*

$$Q^{(1)}(A_j) > 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

ja

$$S_n(0) = \mathbb{E}_{Q^{(1)}}\left(\frac{S_n(1)}{1 + \mathcal{I}(1)}\right),\ n = 1, \dots, N.$$

Olkoon edelleen $Q_j^{(2)}$ riskineutraali todennäköisyysmitta mallissa M_j, $j = 1, \dots, r$. Siis $Q_j^{(2)}$ ja $\mathbb{P}_j$ ovat ekvivalentteja ja

$$S_n(1, A_j) = \mathbb{E}_{Q_j^{(2)}}\left(\frac{S_n(2)}{1 + \mathcal{I}(2)}\right),\ n = 1, \dots, N.$$

Määritellään kentällä $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ todennäköisyysmitta Q asettamalla

$$Q(\omega) = Q^{(1)}(A_j)\, Q_j^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in A_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Silloin Q on riskineutraali todennäköisyysmitta kahden periodin mallissa.

Kääntäen, olkoon Q riskineutraali todennäköisyysmitta kahden periodin mallissa. Määritellään todennäköisyysmitta $Q^{(1)}$ mallissa M_0 asettamalla

$$Q^{(1)}(A_j) = Q(A_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

ja todennäköisyysmitta $Q_j^{(2)}$ mallissa j asettamalla

$$Q_j^{(2)}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{Q(A_j)}, \quad \forall \omega \in A_j,$$

$j = 1, \dots, r$. Silloin $Q^{(1)}$ on riskineutraali todennäköisyysmitta mallissa M_0 ja $Q_j^{(2)}$ on riskineutraali todennäköisyysmitta mallissa M_j, $j = 1, \dots, r$.

Todistus. Olkoon $Q^{(1)}$ mallin M_0 ja $Q_j^{(2)}$ mallin M_j riskineutraali todennäköisyysmitta, $j = 1, \ldots, r$. Ensinnäkin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(1)}{1+\mathcal{I}(1)}\right) &= \mathbb{E}_Q\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{S_n(1,\omega)}{1+\mathcal{I}(1)}1(\omega\in A_j)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{r}\frac{S_n(1,A_j)}{1+\mathcal{I}(1)}Q(A_j)\\
&= \sum_{j=1}^{r}\frac{S_n(1,A_j)}{1+\mathcal{I}(1)}Q^{(1)}(A_j)Q_j^{(2)}(A_j)\\
&= \mathbb{E}_{Q^{(1)}}\left(\frac{S_n(1)}{1+\mathcal{I}(1)}\right) = S_n(0)
\end{aligned}$$

sillä $Q_j^{(2)}(A_j) = 1$. Jos $\omega \in A_j$, niin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(2)}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\,\middle|\,\mathcal{F}_1\right)(\omega)\\
= \; &\mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(2)}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\,\middle|\,A_j\right)\\
= \; &\frac{1}{1+\mathcal{I}(1)}\mathbb{E}_{Q_j^{(2)}}\left(\frac{S_n(2)}{1+\mathcal{I}(2)}\right) = \frac{S_n(1,A_j)}{1+\mathcal{I}(1)},
\end{aligned}$$

sillä

$$Q(B|A_j) = Q_j^{(2)}(B\cap A_j), \quad \forall B \in \mathcal{F}_2.$$

Siis

$$\mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(2)}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\,\middle|\,\mathcal{F}_1\right) = \frac{S_n(1)}{1+\mathcal{I}(1)},$$

joten Q on riskineutraali todennäköisyysmitta kahden periodin mallissa.

Olkoon nyt Q riskineutraali todennäköisyysmitta kahden periodin mallissa ja $Q^{(1)}$ ja $Q_j^{(2)}$ lemman mukaisia, $j = 1, \ldots, r$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^{(1)}}\left(\frac{S_n(1)}{1+\mathcal{I}(1)}\right) &= \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(1)}{1+\mathcal{I}(1)}\right)\\
&= S_n(0).
\end{aligned}$$

Siis $Q^{(1)}$ on riskineutraali todennäköisyysmitta mallissa M_0. Lisäksi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q_j^{(2)}}\left(\frac{S_n(2)}{1+\mathcal{I}(2)}\right) &= \frac{1}{Q(A_j)}\sum_{\omega\in A_j}\frac{Q(\omega)S_n(2,\omega)}{1+\mathcal{I}(2,\omega)} \\ &= \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(2)}{1+\mathcal{I}(2)}\middle| A_j\right) \\ &= (1+\mathcal{I}(1))\,\mathbb{E}_Q\left(\frac{S_n(2)}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\middle| A_j\right) \\ &= (1+\mathcal{I}(1))\,\frac{S_n(1,A_j)}{1+\mathcal{I}(1)} = S_n(1,A_j).\end{aligned}$$

Siis $Q_j^{(2)}$ on riskineutraali todennäköisyysmitta mallissa M_j. □

Todistus. (Lause 5.6) Oletetaan, että lauseen mukainen Q on olemassa. Olkoon θ omavarainen strategia, jolle

$$\mathbb{P}(S(T)\theta(T)\geq 0)=1, \qquad \mathbb{P}(S(T)\theta(T)>0)>0,$$

missä siis $T=2$. Tällöin

$$\begin{aligned}S(0)\theta(1) &= \mathbb{E}_Q\left(\frac{S(1)\theta(1)}{1+\mathcal{I}(1)}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{S(1)\theta(2)}{1+\mathcal{I}(1)}\right) \\ &= \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{E}_Q\left(\frac{S(2)\theta(2)}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\middle| \mathcal{F}_1\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_Q\left[\frac{S(2)\theta(2)}{(1+\mathcal{I}(1))(1+\mathcal{I}(2))}\right] > 0.\end{aligned}$$

Siis markkinat ovat arbitraasivapaat.

Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Olkoon Ω:n ositus

$$\{A_1,\ldots,A_r\}$$

ja yhden periodin mallit

$$M_0, M_1, \ldots, M_r$$

kuten lemmassa 5.7. Saman lemman nojalla kaikki yhden periodin mallit ovat arbitraasivapaita. Lauseen 5.1 nojalla on olemassa näihin liittyvät riskineutraalit todennäköisyysmitat $Q^{(1)}$ ja $Q_1^{(2)},\ldots,Q_r^{(2)}$ vastaten lemmaa 5.8. Lauseen väite seuraa siis lemmasta 5.8. □

5.2.2 Täydellisyys monen periodin mallissa

Markkinoiden täydellisyyden käsite monen periodin mallissa on seuraava.

Määritelmä 5.5. Satunnaismuuttuja X kentällä $(\Omega, \mathcal{F})$ pystytään *toistamaan*, jos on olemassa sellainen omavarainen strategia $\{\theta(k) | k = 1, \dots, T\}$, että

$$X = S(T)\theta(T) \text{ m.v.}$$

Markkinat ovat *täydelliset*, jos jokainen satunnaismuuttuja kentällä $(\Omega, \mathcal{F})$ pystytään toistamaan.

Lemma 5.9. *Olkoon $T = 2$ ja perusjoukko Ω äärellinen. Olkoot yhden periodin markkinat $M_0, M_1, \dots, M_r$ kuten kohdassa 5.2.1. Kahden periodin markkinat ovat arbitraasivapaat ja täydelliset, jos ja vain jos kaikki yhden periodin mallit $M_0, M_1, \dots, M_r$ ovat arbitraasivapaita ja täydellisiä.*

Todistus. Ilman oleellista rajoitusta voidaan olettaa, että $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ ja $\mathbb{P}(\omega) > 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$.

Oletetaan, että $M_0, M_1, \dots, M_r$ ovat arbitraasivapaita ja täydellisiä. Lemman 5.7 nojalla kahden periodin markkinat ovat arbitraasivapaat. Olkoon X mielivaltainen satunnaismuuttuja kentällä $(\Omega, \mathcal{F})$. Kirjoitetaan

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_M\}.$$

Tällöin

$$X(\omega) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \mathbb{1}(\omega = \omega_m)$$

eräille $\alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R}$. Määritellään kuvaus $Y_j : A_j \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$Y_j(\omega) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \mathbb{1}(\omega = \omega_m), \quad j = 1, \dots, r.$$

Yhden periodin markkinoiden täydellisyyden nojalla voidaan määrätä sellaiset vektorit

$$(\theta_1^j, \dots, \theta_N^j)^T \in \mathbb{R}^N,$$

että

$$Y_j(\omega) = \sum_{n=1}^{N} S_n(2, \omega)\theta_n^j, \quad \forall \omega \in A_j,\ j = 1, \dots, r. \tag{5.19}$$

Ilmeisesti

$$X(\omega) \;=\; \sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega) \sum_{j=1}^{r} \mathbb{1}(\omega \in A_j)\theta_n^j, \quad \forall \omega.$$

Olkoon

$$Z(\omega) \;=\; \sum_{n=1}^{N} S_n(1,\omega) \sum_{j=1}^{r} \mathbb{1}(\omega \in A_j)\theta_n^j.$$

Tämä on $\mathcal{F}_1$-mitallinen satunnaismuuttuja. Markkinoiden M_0 täydellisyyden nojalla voidaan määrätä sellainen vektori

$$(\theta_1, \ldots, \theta_N)^T \in \mathbb{R}^N, \tag{5.20}$$

että

$$Z(\omega) = \sum_{n=1}^{N} S_n(1,\omega)\theta_n, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Nyt X voidaan toistaa omavaraisella strategialla hankkimalla hetkellä 0 edellä saatu salkku (5.20) ja hetkellä 1 ehdon (5.19) täyttävä salkku $(\theta_1^j, \ldots, \theta_N^j)^T$, jos tällöin ollaan joukossa A_j.

Oletetaan, että kahden periodin markkinat ovat arbitraasivapaat ja täydelliset. Lemman 5.7 nojalla kaikki yhden periodin markkinat ovat arbitraasivapaita. Osoitetaan seuraavaksi, että markkinat M_{j_0} ovat täydelliset, kun $j_0 \neq 0$. Olkoon $\omega_0 \in A_{j_0}$ ja

$$X(\omega) = \mathbb{1}(\omega = \omega_0), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Tämä voidaan toistaa kahden periodin mallissa, joten

$$X = S(2)\theta(2) \quad \text{m.v.}$$

missä salkun $\theta(2)$ komponentit ovat $\mathcal{F}_1$-mitallisia. Siispä voidaan määrätä sellaiset vektorit

$$(\theta_1^j, \ldots, \theta_N^j)^T \in \mathbb{R}^N, \quad j = 1, \ldots, r,$$

että

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega)\theta_n^j \mathbb{1}(\omega \in A_j), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Erityisesti

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; X(\omega_0) = \sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega_0)\theta_n^{j_0}, \\ 0 \;&=\; X(\omega) = \sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega)\theta_n^{j_0}, \quad \forall \omega \in A_{j_0} \setminus \{\omega_0\}. \end{aligned}$$

Siis salkku $\left(\theta_1^{j_0}, \ldots, \theta_N^{j_0}\right)^T$ toistaa X:n mallissa M_{j_0} (tarkemmin, salkku toistaa X:n rajoitettuna joukkoon A_{j_0}). Koska kaikki edellä esitettyä muotoa olevat satunnaismuuttujat pystytään toistamaan, on malli M_{j_0} täydellinen.

On vielä näytettävä, että M_0 on täydellinen. Olkoon j_0 kiinteä. Riittää näyttää, että $\mathbb{1}(\omega \in A_{j_0})$ pystytään toistamaan M_0:ssa. Olkoon

$$X = (1 + \mathcal{I}(2))\mathbb{1}(\omega \in A_{j_0}).$$

Tämä voidaan toistaa kahden periodin mallissa, joten alkuosan tapaan

$$X = S(2)\theta(2) \quad \text{m.v.}$$

missä salkun $\theta(2)$ komponentit ovat $\mathcal{F}_1$-mitallisia. Lisäksi

$$S(1)\theta(1) = S(1)\theta(2),$$

missä $\theta(1) = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^T \in \mathbb{R}^N$ on vakiovektori. Voidaan siis määrätä sellaiset vektorit

$$(\theta_1^j, \ldots, \theta_N^j)^T \in \mathbb{R}^N,$$

että

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega)\theta_n^j \mathbb{1}(\omega \in A_j), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Erityisesti

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega)\theta_n^{j_0} &= 1 + \mathcal{I}(2), \quad \forall \omega \in A_{j_0}, \\
\sum_{n=1}^{N} S_n(2,\omega)\theta_n^{j} &= 0, \quad \forall \omega \in A_j,\ j \neq j_0.
\end{aligned}$$

Nyt $(1+\mathcal{I}(2))\mathbb{1}(\omega \in A_{j_0})$ rajoitettuna joukkoon A_{j_0} voidaan toistaa mallissa M_{j_0} tallettamalla pankkiin vuodeksi yksi euro. Samoin nollasatunnaismuuttuja voidaan toistaa muissa malleissa valitsemalla kaikkia arvopapereita nolla kappaletta. Koska mallit $M_1, \ldots, M_r$ ovat arbitraasivapaita, on oltava

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} S_n(1, A_{j_0})\theta_n^{j_0} = 1, \\
&\sum_{n=1}^{N} S_n(1, A_j)\theta_n^{j} = 0, \quad \forall j \neq j_0.
\end{aligned}$$

Nähdään, että

$$\begin{aligned} S(1)\theta(1) &= S(1)\theta(2) \\ &= \mathbb{1}(\omega \in A_{j_0}), \end{aligned}$$

joten salkku $(\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ toistaa satunnaismuuttujan $\mathbb{1}(\omega \in A_{j_0})$ mallissa M_0. □

Lause 5.10. *Markkinat ovat arbitraasivapaat ja täydelliset, jos ja vain jos on olemassa tasan yksi riskineutraali todennäköisyysmitta.*

Todistus. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat ja täydelliset. Sama pätee lemmojen 5.7 ja 5.9 nojalla kaikille yhden periodin markkinoille $M_0, M_1, \dots, M_r$. Lauseen 5.5 nojalla kaikilla yhden periodin markkinoilla on tasan yksi riskineutraali todennäköisyysmitta. Lemman 5.8 nojalla myös kahden periodin markkinoilla on tasan yksi riskineutraali todennäköisyysmitta.

Oleteaan, että riskineutraaleja mittoja on tasan yksi. Sama pätee lemman 5.8 nojalla kaikille yhden periodin markkinoille $M_0, M_1, \dots, M_r$. Lauseen 5.5 nojalla kaikki yhden periodin markkinat ovat arbitraasivapaita ja täydellisiä. Kahden periodin markkinat ovat täydelliset lemman 5.9 nojalla. □

Esimerkki 5.6. Olkoon arvopaperi 1 kuten edellä

$$\begin{cases} S_1(0) = 1, \\ S_1(k) = (1 + \mathcal{I}(1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(k)), \quad k = 1, \dots, T, \end{cases}$$

missä $\mathcal{I}(j)$ on $\mathcal{F}_{j-1}$-mitallinen ja $\mathcal{I}(j) \geq 0$ m.v. Arvopaperi n olkoon n vuoden nollakuponkibondi. Toisin sanoen

$$S_n(n) \equiv 1, \qquad n = 2, \dots, T.$$

Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Olkoon Q riskineutraali mitta.

Kun Q on annettu, pystytään bondin arvot määräämään ennen erääntymispäivää. Jos $k \leq n$, niin

$$S_n(k) = \mathbb{E}_Q \left(\frac{S_n(T)}{(1 + \mathcal{I}(k+1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(T))} \middle| \mathcal{F}_k \right).$$

Satunnaismuuttujaa $S_n(T)$ ei ole mallissa määritelty, mutta markkinoiden instrumentteja käyttäen voidaan asettaa

$$S_n(T) = \overbrace{S_n(n)}^{=1}(1 + \mathcal{I}(n+1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(T)).$$

Tämä on johdannainen markkinoiden arvopapereista, ja voidaan toistaa sopivalla strategialla. Arvot määräytyvät edelleen lauseen 5.6 mukaisesti. Siis

$$S_n(k) = \mathbb{E}_Q \left(\left[(1 + \mathcal{I}(k+1)) \cdots (1 + \mathcal{I}(n)) \right]^{-1} \middle| \mathcal{F}_k \right). \tag{5.21}$$

Taulukko 1: Korkorakenne hetkellä 0

Eräpäivä	Vuosikorko
1	$\mathcal{I}_1 = i_1$
2	$S_2(0)^{-1/2} - 1$
$\vdots$	$\vdots$
k	$S_k(0)^{-1/k} - 1.$

Jos $k \leq \frac{T}{2}$, määräävät mallin bondit korkorakenteen kehityksen maturiteeteille $1, \ldots, k$. Hetkellä 0 korkorakenne on taulukon 1 mukainen. Oikealla olevat vuosikorot määräytyvät kaavasta (5.21) ja ovat deterministisiä, koska $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Maksamalla $S_h(0)$ euroa hetkellä 0 saadaan 1 euro hetkellä h. Taulukon 3.1 mukainan vuosikorko s_h määräytyy siis ehdosta

$$1 = S_h(0) \cdot (1 + s_h)^h$$

eli

$$s_h = S_h(0)^{-1/h} - 1.$$

Hetkellä 1 korkorakenne on taulukon 2 mukainen. Näihin päädytään nyt seuraavasti.

Taulukko 2: Korkorakenne hetkellä 1

Eräpäivä	Vuosikorko
2	$\mathcal{I}_2 = S_2(1)^{-1} - 1$
3	$S_3(1)^{-1/2} - 1$
$\vdots$	$\vdots$
k	$S_{k+1}(1)^{-1/k} - 1.$

Maksamalla hetkellä 1 markkinoiden mukainen määrä $S_{h+1}(1)$ saadaan 1 euro hetkellä $h + 1$ eli h vuoden kuluttua. Operaatiossa siis ostetaan alunpitäen $h + 1$ vuoden bondi hetkellä 1 markkinahintaan. Arvopaperi antaa edelleen 1 euron hetkellä $h + 1$. Taulukkoa 3.2 vastaavat vuosikorot määräytyvät ehdoista

$$1 = S_{h+1}(1)(1 + s_{1h})^h$$

eli

$$s_{1h} = S_{h+1}(1)^{-1/h} - 1.$$

Taulukko on stokastinen, mutta korot ovat $\mathcal{F}_1$-mitallisia. Hetkellä 1 pystytään operoimaan ikäänkuin deterministisillä markkinoilla.

5.2.3 Salkun valintaongelma monen periodin mallissa

Olkoon markkinoita kuvaava malli kuten kohdassa 5.2 ja olkoon toinijalla hetkellä 0 alkupääoma $V(0) > 0$. Sijoitetaan tämä kokonaisuudessaan markkinoille käyttäen omavaraista strategiaa $\theta(k), k = 1, \ldots, T$. Vaaditaan siis myös, että $S(0)\theta(1) = V(0)$. Varallisuus $V(k)$ hetkellä k on

$$V(k) = S(k)\theta(k).$$

Pyritään määräämään strategia optimaalisesti.

Okoon u toimijan utiliteettifunktio. Oletetaan, että toimija pyrkii maksimoimaan loppuvarallisuuden utiliteetin. On siis etsittävä omavarainen strategia, joka maksimoi odotusarvon

$$\mathbb{E}\left(u(S(T)\theta(T))\right) = \mathbb{E}\left(u\left(\sum_{n=1}^{N} S_n(T)\theta_n(T)\right)\right). \tag{5.22}$$

Luonnollista voisi olla myös kieltää lainanotto ja lyhyeksimyynti, mutta ei tarkastella tällaisia muunnelmia jatkossa. Oletetaan seuraavassa, että utiliteettifunktio u toteuttaa kohdassa 5.1.3 esitetyt säännöllisyysvaatimukset.

Optimointitehtävä on haastava erityisesti siksi, että salkut kytkeytyvät toisiinsa omavaraisuusvaatimuksen takia. Tehtävä helpottuu, jos siirrytään tarkastelemaan arvopapereiden tuottoasteita ja arvopapereihin sijoitettavien varojen suhteellisia osuuksia kohdan 5.1.3 tapaan.

Merkitään

$$\begin{aligned} w_n(k) &= \frac{S_n(k-1)\theta_n(k)}{V(k-1)}, \\ R_n(k) &= \frac{S_n(k) - S_n(k-1)}{S_n(k-1)}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

$k = 1, \ldots, T$, $n = 1, \ldots, N$. Voi olla tietysti $V(k-1) = 0$ tai $S_n(k-1) = 0$, jolloin $w_n(k)$ tai $R_n(k)$ ei ole hyvin määritelty. Ei kiinnitetä tähän kuitenkaan huomiota. Selvästi

$$\begin{aligned} S(T)\theta(T) &= \sum_{n=1}^{N} S_n(T)\theta_n(T) \\ &= V(0)\left(1 + \sum_{n=1}^{N} w_n(1)R_n(1)\right)\cdots\left(1 + \sum_{n=1}^{N} w_n(T)R_n(T)\right). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Jos $\{\theta(k)\}$ on omavarainen strategia, niin $w_n(k)$ on $\mathcal{F}_{k-1}$-mitallinen ja

$$\sum_{n=1}^{N} w_n(k) = 1, \quad k = 1, \ldots, T. \tag{5.25}$$

Kääntäen, jos (5.25) toteutuu ja $w_n(k)$ on $\mathcal{F}_{k-1}$-mitallinen, $k = 1, \ldots, T, n = 1, \ldots, N$, niin ratkaisemalla salkut yhtälöistä (5.23) saadaan omavarainen strategia ja yhteys (5.24) toteutuu.

Optimointitethtävä on siis saatu seuraavaan muotoon. Etsittävä sellaiset $\mathcal{F}_{k-1}$-mitalliset satunnaismuuttujat $w_1(k), \ldots, w_N(k)$, $k = 1, \ldots, T$, että

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(u\left(V(0)\left(1 + \sum_{n=1}^N w_n(1)R_n(1)\right)\cdots\left(1 + \sum_{n=1}^N w_n(T)R_n(T)\right)\right)\right) = \text{ max!} \\ \\ \sum_{n=1}^N w_n(k) = 1, \quad k = 1, \ldots, T. \end{cases}$$

Tehtävä on ilmeisesti helpottunut, sillä sidosehto (5.25) vaikuttaa teknisesti yksinkertaisemmalta kuin salkkuja koskeva omavaraisuusvaatimus.

Sopivan tuntuinen menetelmä on lähteä ratkomaan osuuksia loppupäästä (lähestymistapaa kutsutaan usein *dynaamiseksi ohjelmoinniksi*). Jos $w_n(k)$ on annettu, $k = 1, \ldots, T-1$, $n = 1, \ldots, N$, on optimaalista valita osuudet $w_n(T)$ siten, että $\sum_{n=1}^N w_n(T) = 1$ ja

$$\mathbb{E}\left(u\left(V(0)\left(1 + \sum_{n=1}^N w_n(1)R_n(1)\right)\cdots\left(1 + \sum_{n=1}^N w_n(T)R_n(T)\right)\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right)$$

maksimoituu. Optimaalinen $w_n(T) = w_n^*(T)$ on yleisesti muotoa

$$w_n^*(T) = f_n(S_1(1), \ldots, S_N(1), \ldots, S_1(T-1), \ldots, S_N(T-1)), \quad n = 1, \ldots, N,$$

missä f_n on Borel-mitallinen funktio. Yleensä $w_n^*(T)$ riippuu myös aiempien vuosien osuuksista $w_1(k), \ldots, w_N(k)$, $k \leq T-1$, vaikka tätä ei edellä olekaan merkitty näkyviin.

Sijoittamalla saatu ratkaisu optimoitavaan funktioon ja määräämällä utiliteetin odotusarvo saadaan maksimaalinen utiliteetti kaikille hetkeen $T-1$ saakka ulottuville strategioille. Seuraavassa vaiheessa on maksimoitava

$$\mathbb{E}\left(u\left(V(0)\left(\prod_{k=1}^{T-1}\left(1 + \sum_{n=1}^N w_n(k)R_n(k)\right)\right)\left(1 + \sum_{n=1}^N w_n^*(T)R_n(T)\right)\right)\right).$$

Ratkaistaan optimaaliset osuudet $w_n^*(T-1)$ ottamalla ensin ehdollinen odotusarvo sigma-algebran $\mathcal{F}_{T-2}$ suhteen samaan tapaan kuin edellä. Näin jatkaen saadaan lopulta optimaaliset $w_1^*(1), \ldots, w_N^*(1)$, jotka siis ovat deterministisiä.

Lopuksi kaikki optimaaliset osuudet $w_n^*(k)$ voidaan määrätä käyttäen hyväksi edellä saatuja optimointitehtävien ratkaisuja. Esimerkiksi osuudet $w_n^*(2)$ saadaan osuuksista $w_n^*(1)$ ja arvopapereiden hetken 1 hinnoista.

Esimerkki 5.7. Olkoon $T = 2$ ja $u(z) = \log z$ ($u(z) = -\infty$, jos $z \leq 0$). Markkinoilla on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 vastaa pankkitalletusta. Vuosikorko on vakio $i = 0$ molempina periodeina. Arvopaperi 2 on osake, jonka arvokehitys määräytyy seuraavasti. Olkoot ξ, ξ_1 ja ξ_2 riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $\alpha \in (0, 1/5)$

vakio. Oletetaan, että

$$\mathbb{P}(\xi = -1/2) = 1/4 \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\xi = 1/2) = 3/4.$$

Osakkeen arvot ovat

$$S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = 1 + \xi_1 \quad \text{ja} \quad S_2(2) = (1 + \xi_1)(1 + \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2).$$

Tällöin

$$R_1(1) = R_1(2) = 0 \quad \text{ja} \quad R_2(1) = \xi_1,\ R_2(2) = \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2.$$

Merkitään lyhyesti $y_1 = w_2(1)$ ja $y_2 = w_2(2)$, missä y_1 on vakio ja y_2 on $\mathcal{F}_1$-mitallinen satunnaismuuttuja ($\mathcal{F}_1 = \sigma(S_2(1)) = \sigma(\xi_1)$). On siis maksimoitava odotusarvo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(u(V(2))\right) &= \mathbb{E}\left(u(V(0)(1 + y_1 R_2(1))(1 + y_2 R_2(2))\right) \\
&= \log V(0) + \mathbb{E}\left(\log(1 + y_1\xi_1)\right) + \mathbb{E}\left(\log(1 + y_2(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2))\right),
\end{aligned}$$

missä alkupääoma $V(0)$ oletetaan positiiviseksi. Nyt riippumattomuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(u(V(2)) \,|\, \xi_1\right) &= \log V(0) + \log(1 + y_1\xi_1) \\
&\quad + \frac{1}{4}\log\left(1 + y_2(\alpha\xi_1 - (1-\alpha)/2)\right) + \frac{3}{4}\log\left(1 + y_2(\alpha\xi_1 + (1-\alpha)/2)\right).
\end{aligned}$$

Derivoimalla y_2:n suhteen saadaan optimaalinen osuus y_2^*,

$$y_2^* = \frac{4\alpha\xi_1 + 1 - \alpha}{(1-\alpha)^2 - 4\alpha^2\xi_1^2}.$$

Tässä erikoistapauksessa y_2^* ei riipu y_1:stä. Sijoittamalla y_2^* joko odotusarvon $\mathbb{E}\left(u(V(2))\right)$ tai ehdollisen odotusarvon $\mathbb{E}\left(u(V(2)) \,|\, \xi_1\right)$ lausekkeeseen ja derivoimalla y_1:n suhteen saadaan optimaalinen osuus $y_1^* = 1$.

Hetkellä 0 sijoitetaan siis kaikki varat osakkeeseen. Varallisuus hetkellä 1 on

$$\begin{aligned}
V(1) &= V(0)(1 + \xi_1) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}V(0), & \xi_1 = -1/2, \\ \frac{3}{2}V(0), & \xi_1 = 1/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Jos $\xi_1 = -1/2$, niin

$$y_2^* = \frac{1 - 3\alpha}{1 - 2\alpha}.$$

Osakkeeseen sijoitetaan

$$\frac{1 - 3\alpha}{1 - 2\alpha}V(1)$$

euroa ja pankkiin laitetaan

$$\frac{\alpha}{1-2\alpha}V(1)$$

euroa. Jos $\xi_1 = 1/2$, niin

$$y_2^* = \frac{1+\alpha}{1-2\alpha}.$$

Osakkeeseen sijoitetaan

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha}V(1)$$

euroa ja pankkiin laitetaan

$$\frac{-3\alpha}{1-2\alpha}V(1)$$

euroa (eli otetaan lainaa).

5.2.4 Keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuva suojautuminen

Olkoon markkinoita kuvaava malli kuten kohdassa 5.2. Olkoon X mielivaltainen satunnaismuuttuja kentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tulkitaan X rahamääräksi, jonka toimija joutuu maksamaan hetkellä T.

Pyritään määräämään alkupanos V ja omavarainen strategia $\{\theta(k)\}$ siten, että keskineliöpoikkeama

$$\mathbb{E}\left((X - S(T)\theta(T))^2\right) \tag{5.26}$$

minimoituu. Vaaditaan siis myös, että $S(0)\theta(1) = V$.

Kiinnitetään ensin alkupanos V. Minimointi voidaan tällöin suorittaa kohdan 5.2.3 mukaisesti. Lopputuloksena saadaan minimaalinen keskineliöpoikkeama annetulle panokselle. Lopuksi suoritetaan minimointi panoksen V suhteen.

Tarkastellaan nyt lokaalia versiota edellisestä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että markkinoilla on vain vuoden nollakuponkibondi (arvopaperi 1) ja yksi riskillinen arvopaperi (arvopaperi 2). Olkoon lisäksi bondin vuosikorko $i = 0$ kaikkina periodeina. Kohdassa 5.1.4 ongelmalle esitettiin ratkaisu tapauksessa $T = 1$. Tällöin hetkellä 0 valittiin salkku $(\theta_1, \theta_2)^T$ siten, että

$$\mathbb{E}\left((X - \theta_1 - \theta_2 S_2(1))^2\right) \tag{5.27}$$

minimoituu. Ratkaisu on $(\theta_1, \theta_2)^T = (\theta_1^*, \theta_2^*)^T$, missä

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \mathbb{E}(X) - \theta_2^* \mathbb{E}(S_2(1)), \\ \theta_2^* &= \frac{\mathrm{Cov}(X, S_2(1))}{\mathrm{Var}(S_2(1))}. \end{aligned}$$

Muotoillaan yhden periodin ongelma jatkon kannalta sopivampaan muotoon. Hetkellä 0 hankitaan eräs salkku $(\theta_1(1), \theta_2(1))^T$. Tästä syntyy varallisuus $V(0)$,

$$V(0) = \theta_1(1) + \theta_2(1)S_2(0).$$

Hetkellä 1 salkkua on muutettava siten, että sen arvoksi tulee X. On siis hankittava salkku $(\theta_1(2), \theta_2(2))^T$, jolle pätee

$$\begin{aligned} V(1) &= \theta_1(2) + \theta_2(2)S_2(1) \\ &= X. \end{aligned}$$

Tämä on varallisuus hetkellä 1, joka siis käytetään sopimuksen mukaisen määrän X maksamiseen. Edellä esitetty strategia ei yleensä ole omavarainen.

Asia voidaan nähdä myös kustannusten syntymisenä. *Kumulatiivinen kustannus* $C(k)$ hetkeen k mennessä on

$$\begin{aligned} C(0) &= \theta_1(1) + \theta_2(1)S_2(0), \\ C(1) &= C(0) + \theta_1(2) + \theta_2(2)S_2(1) - (\theta_1(1) + \theta_2(1)S_2(1)) \\ &= X - \theta_2(1)(S_2(1) - S_2(0)). \end{aligned}$$

Pyritään minimoimaan ensimmäisen periodin kustannusten keskineliöpikkeamaa eli odotusarvoa

$$\mathbb{E}\left((C(1) - C(0))^2\right) = \mathbb{E}\left((X - \theta_1(1) - \theta_2(1)S_2(1))^2\right).$$

Tämä on sama ongelma kuin (5.27) edellä. Jatkon kannalta on mukavampi kirjoittaa minimoitava keskineliöpoikkeama muotoon

$$\mathbb{E}\left((V(1) - V(0) - \theta_2(1)(S_2(1) - S_2(0)))^2\right).$$

Optimaaliset $V(0) = V^*(0)$ ja $\theta_2(1) = \theta_2^*(1)$ ovat

$$\begin{aligned} V^*(0) &= \mathbb{E}(X) - \theta_2^*(1)\mathbb{E}(S_2(1) - S_2(0)), \\ \theta_2^*(1) &= \frac{\mathrm{Cov}(X, S_2(1) - S_2(0))}{\mathrm{Var}(S_2(1) - S_2(0))}. \end{aligned}$$

Edellä saatu $\theta_1^*(1)$ on tällöin

$$\theta_1^*(1) = V^*(0) - \theta_2^*(1)S_2(0).$$

Olkoon nyt $T \geq 2$. Yhden periodin mallin mukaisesti varallisuus hetkellä k on

$$\begin{aligned} V(k) &= \theta_1(k+1) + \theta_2(k+1)S_2(k), \quad k \leq T-1, \\ V(T) &= \theta_1(T+1) + \theta_2(T+1)S_2(T) = X. \end{aligned}$$

Sovitaan, että $\theta_1(T+1) = X$ ja $\theta_2(T+1) = 0$. Kumulatiivinen kustannus $C(k)$ on

$$\begin{aligned} C(k) &= C(k-1) + \theta_1(k+1) + \theta_2(k+1)S_2(k) \\ &\quad -(\theta_1(k) + \theta_2(k)S_2(k)). \end{aligned}$$

Esimerkiksi induktiolla nähdään, että

$$\begin{aligned} C(k) &= V(k) - \sum_{j=1}^{k} \theta_2(j)(S_2(j) - S_2(j-1)), \quad k = 1, \ldots, T-1, \\ C(T) &= X - \sum_{j=1}^{T} \theta_2(j)(S_2(j) - S_2(j-1)). \end{aligned}$$

Hetkellä $T-1$ oletetaan, että toimija pyrkii yhden periodin mallin mukaisesti minimoimaan keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left((C(T) - C(T-1))^2 \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right).$$

Yhtäpitävästi, tavoitteena on valita $V(T-1)$ ja $\theta_2(T)$ siten, että

$$\mathbb{E}\left((V(T) - V(T-1) - \theta_2(T)(S_2(T) - S_2(T-1)))^2 \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right)$$

minimoituu. Tällöin siis optimaaliset $V(T-1) = V^*(T-1)$ ja $\theta_2(T) = \theta_2^*(T)$ tulevat olemaan $\mathcal{F}_{T-1}$-mitallisia satunnaismuuttujia. Ratkaisu on

$$\begin{aligned} V^*(T-1) &= \mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) - \theta_2^*(T)\mathbb{E}(S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1}), \\ \theta_2^*(T) &= \frac{\mathrm{Cov}(X, S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1})}{\mathrm{Var}(S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1})}. \end{aligned}$$

Bondien määrä salkussa on

$$\begin{aligned} \theta_1^*(T) &= V^*(T-1) - \theta_2^*(T)S_2(T-1) \\ &= \mathbb{E}\left(X - \theta_2^*(T)(S_2(T) - S_2(T-1)) \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right) - \theta_2^*(T)S_2(T-1). \end{aligned}$$

Lokaalissa ajattelussa hetkellä $T-2$ minimoidaan tulevan vuoden kustannusten keskineliöpoikkeama. Hetkellä $T-1$ tullaan edellisen askeleen mukaisesti valitsemaan salkku, jonka arvo on $V^*(T-1)$. Kustannukset aikavälillä $[T-2, T-1)$ ovat

$$\begin{aligned} & C(T-1) - C(T-2) \\ = \; & V^*(T-1) - V(T-2) - \theta_2(T-1)(S_2(T-1) - S_2(T-2))). \end{aligned}$$

Määrätään $V(T-2)$ ja $\theta_2(T-1)$ siten, että keskineliöpoikkeama

$$\mathbb{E}\left((C(T-1) - C(T-2))^2\right)$$

minimoituu.

Hetkinä $T-3,\dots,1$ menetellään vastaavasti. Induktiivisesti saadaan

$$\begin{aligned} V^*(k) &= \mathbb{E}\left(X - \sum_{j=k+1}^{T} \theta_2^*(j)(S_2(j) - S_2(j-1)) \,|\, \mathcal{F}_k\right), \\ \theta_2^*(k+1) &= \frac{\operatorname{Cov}(X - \sum_{j=k+2}^{T} \theta_2^*(j)(S_2(j) - S_2(j-1)), S_2(k+1) - S_2(k) \,|\, \mathcal{F}_k)}{\operatorname{Var}(S_2(k+1) - S_2(k) \,|\, \mathcal{F}_k)}, \\ \theta_1^*(k+1) &= \mathbb{E}\left(X - \sum_{j=k+1}^{T} \theta_2^*(j)(S_2(j) - S_2(j-1)) \,|\, \mathcal{F}_k\right) - \theta_2^*(k+1)S_2(k). \end{aligned}$$

6 Markkinoiden Pareto-optimaalisuudesta

Liitetään markkinamalliin kuvaukset toimijoista ja heidän näkemyksistään salkkuihin. Lähtökohdaksi otetaan kohdan 5 alussa esitetty arvopapereita kuvaava malli. Arvopaperi 1 on edelleen nollakuponkibondi. Olkoon lisäksi $T = 1$. Uutena piirteenä oletetaan, että markkinat ovat rajalliset siten, että arvoperia n on markkinoilla L_n kappaletta, $n = 1,\dots,N$. Merkitään

$$L = (L_1, \dots, L_N)^T.$$

Salkut hankitaan hetkellä 0 kuten aiemminkin. Seuraavassa tarkastellaan puhtaita vaihtokauppoja, jolloin hinnoilla $S_n(0)$ ole mitään roolia. Arvopapereiden hinnat $S_n(1), n = 1,\dots,N$ hetkellä 1 ovat satunnaismuuttujia. Toimijoiden käsitykset näiden jakaumista oletetaan identtisiksi.

Olkoot markkinoiden toimijat $1,\dots,K$. Toimija ilmaistaan salkuissa yläindeksillä,

$$\theta^k = \left(\theta_1^k, \dots, \theta_N^k\right)^T$$

tarkoittaa toimijan k salkkua. Näiden yhdistelmää

$$(\theta^1, \dots, \theta^K)$$

kutsutaan *allokoinniksi.* Allokointi on *sallittu*, jos *clearing-ehto*

$$L = \sum_{k=1}^{K} \theta^k \tag{6.1}$$

toteutuu.Vaatimus on siis, että kaikki arvopaperit ovat toimijoiden hallussa.

Toimija k mittaa salkkujen hyötyä *utiliteettifunktion* $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avulla. Täsmällisesti, salkun $\theta^k = (\theta_1^k, \dots, \theta_N^k)^T$ *hyöty* on

$$\mathbb{E}\left(u_k(S(1)\theta^k)\right) = \mathbb{E}\left(u_k\left(\sum_{n=1}^{N} S_n(1)\theta_n^k\right)\right).$$

Oletetaan aiempaan tapaan, että toimija pyrkii maksimoimaan hyötynsä. Samoin oletetaan, että utiliteettifunktiot ovat konkaaveja, aidosti kasvavia ja jatkuvasti derivoituvia koko $\mathbb{R}$:ssä.

Määritelmä 6.1. Sallittu allokointi $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ on (rajoitetusti) *Pareto-optimaalinen*, jos millään muulla sallitulla allokoinnilla $(\theta^1, \dots, \theta^K)$ ei päde

$$\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\theta^k\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right), \quad k = 1, \dots, K, \tag{6.2}$$

siten, että epäyhtälö on aito jollain $k \in \{1, \dots, K\}$.

Vaatimus Pareto-optimaalisuudesta voidaan ymmärtää 'markkinoiden rationaalisuudeksi'. Yksittäiset toimijat eivät yleensä tavoita oman hyötynsä maksimia.

Teknisten yksityiskohtien vähentämiseksi oletetaan kohdassa 6, että

$$|S_n(1)| \leq M \quad \text{m.v. }, \quad n = 1, \dots, N,$$

missä M on vakio. Olkoon $A(1)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1,

$$A(1) = \sum_{n=1}^{N} S_n(1) L_n = S(1)L.$$

Clearing-ehto (6.1) korvataan toisinaan yksinkertaisemmalla vaatimuksella

$$\sum_{k=1}^{K} S(1)\theta^k = A(1). \tag{6.3}$$

Jos clearing-ehto toteutuu, niin

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} S(1)\theta^k &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N} S_n(1)\theta_n^k \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} S_n(1)\theta_n^k = \sum_{n=1}^{N} S_n(1)L_n = A(1).
\end{aligned}$$

Siis (6.3) toteutuu. Kääntäen, jos (6.3) toteutuu, niin voidaan konstruoida clearing-ehdon täyttävät salkut $\varphi^1, \dots, \varphi^K$, joille

$$S(1)\varphi^k = S(1)\theta^k, \qquad k = 1, \dots, K. \tag{6.4}$$

Tämä nähdään seuraavasti. Oletetaan ensin, että $S_1(1) \dots, S_N(1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Jos siis

$$\alpha_1 S_1(1) + \cdots + \alpha_N S_N(1) = 0 \quad \text{m.v. },$$

missä $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, niin $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 0$. Koska yhtälön (6.3) nojalla

$$A(1) = \sum_{n=1}^{N} L_n S_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \theta_n^k \right) S_n(1),$$

on välttämättä $L_n = \sum_{k=1}^{K} \theta_n^k$. Siis voidaan valita $\varphi^k = \theta^k$, $\forall k$.

Oletetaan nyt, että $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ eivät ole lineaarisesti riippumattomia. Olkoot esimerkiksi $S_1(1), \ldots, S_{N'}(1)$ lineaarisesti riippumattomia ja

$$S_{N'+1}(1), \ldots, S_N(1)$$

näiden virittämiä. Siis on olemassa $\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mN'} \in \mathbb{R}$ siten, että

$$S_m(1) = \sum_{n=1}^{N'} \alpha_{mn} S_n(1) \qquad \text{m.v.},$$

$m = N'+1, \ldots, N$. Muodostetaan typistetyt markkinat, joilla on vain arvopaperit $1, \ldots, N'$ ja joiden lukumäärät $L'_1, \ldots, L'_{N'}$ ovat

$$L'_n = L_n + \sum_{m=N'+1}^{N} \alpha_{mn} L_m, \quad n = 1, \ldots, N'.$$

Tällöin

$$\sum_{n=1}^{N'} S_n(1) L'_n = A(1).$$

Muodostetaan allokointi $(\theta'^1, \ldots, \theta'^K)$ typistetyillä markkinoilla asettamalla

$$\theta'^k_n = \theta^k_n + \sum_{m=N'+1}^{N} \alpha_{mn} \theta^k_m,$$

$n = 1, \ldots, N'$, $k = 1, \ldots, K$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{N'} S_n(1) \theta'^k_n = S(1)\theta^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

joten

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N'} S_n(1) \theta'^k_n = A(1).$$

Siis (6.3) pätee typistetyillä markkinoilla. Jo todistetun nojalla

$$\sum_{k=1}^{K} \theta'^k = L'_n, \qquad n = 1, \ldots, N'.$$

Valitaan reaaliluvut $\varrho^k_{N'+1}, \ldots, \varrho^k_N$, $k = 1, \ldots, K$, joille

$$\varrho^1_n + \cdots + \varrho^K_n = L_n, \quad n = N' + 1, \ldots, N.$$

Muodostetaan salkut $\varphi^1, \ldots, \varphi^K$ alkuperäisillä markkinoilla asettamalla

$$\begin{cases} \varphi^k_n = \theta'^k_n - \varrho^k_{N'+1}\alpha_{N'+1,n} - \cdots - \varrho^k_N \alpha_{N,n}, & n = 1, \ldots, N', \\ \varphi^k_n = \varrho^k_n, \qquad n = N' + 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Nämä muodostavat sallitun allokoinnin alkuperäisillä markkinoilla, nimittäin

$$L = \sum_{k=1}^{K} \varphi^k.$$

Lisäksi

$$S(1)\varphi^k = S(1)\theta^k, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Lause 6.1. *Oletetaan, että allokointi* $(\bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^K)$ *toteuttaa clearing-ehdon. Jos on olemassa sellaiset positiiviset vakiot* $h_1, \ldots, h_K$ *ja satunnaismuuttuja* $f : \Omega \to (0, \infty)$, *että*

$$u'_k\left(S(1, \omega)\bar\theta^k\right) = h_k f(\omega) \ \ m.v.\ , \ k = 1, \ldots, K, \tag{6.5}$$

niin $(\bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^K)$ *on Pareto-optimaalinen. Jos markkinat ovat täydelliset, niin* $(\bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^K)$ *on Pareto-optimaalinen, jos ja vain jos edellä esitetyt ehdot täyttävät vakiot* $h_1, \ldots, h_K$ *ja funktio* f *ovat olemassa.*

Tulos tunnetaan Borchin lauseena ja on esitetty alunperin vakuutussovellusten yhteydessä lähteessä Borch (1960).

Todistus. (Lause 6.1) Oletetaan, että (6.5) toteutuu. Olkoon $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$ sallittu allokointi. Määritellään salkut $\xi^1, \ldots, \xi^K$ asettamalla

$$\xi^k = \theta^k - \bar\theta^k, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Tällöin

$$\sum_{k=1}^{K} \xi^k = 0. \tag{6.6}$$

Konkaavisuuden nojalla

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\theta^k\right)\right) = \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k + S(1)\xi^k\right)\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right) + u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)S(1)\xi^k\right)\\ &= \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) + h_k\mathbb{E}\left(fS(1)\xi^k\right).\end{aligned}$$

Saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{h_k}\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\theta^k\right)\right)\\ \leq\ &\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{h_k}\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) + \mathbb{E}\left(fS(1)\sum_{k=1}^{K}\xi^k\right).\end{aligned}$$

Viimeinen odotusarvo on nolla, joten

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{h_k}\left[\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\theta^k\right)\right) - \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right)\right] \leq 0.$$

Nähdään, että $(\bar{\theta}^1,\ldots,\bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen.

Olkoot nyt markkinat täydelliset ja $(\bar{\theta}^1,\ldots,\bar{\theta}^K)$ Pareto-optimaalinen. Tehdään vastaoletus, että (6.5) ei päde millään $h_1,\ldots,h_K > 0$, $f > 0$. Olkoon

$$A = \left\{\omega | u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right) > u_2'\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\right\}$$

ja

$$B = \left\{\omega | u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right) < u_2'\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\right\}.$$

Rajoituksetta voidaan olettaa, että $\mathbb{P}(A\cup B) > 0$ (tämä pätee jollekin toimijaparille). Pareto-optimaalisuuteen ei vaikuta se, että alkuperäiset utiliteettifunktiot u_k korvataan funktioilla $\alpha_k u_k$, missä $\alpha_k > 0$. Kertomalla u_1 sopivalla vakiolla voidaan olettaa, että

$$\mathbb{P}(A) > 0 \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(B) > 0.$$

Olkoot a ja b positiivisia vakioita ja

$$X(\omega) = \begin{cases} +a, & \omega\in A\\ -b, & \omega\in B\\ \ \ 0, & \text{muuten.}\end{cases}$$

Täydellisyyden nojalla voidaan määrätä sellainen salkku $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N)^T$, että

$$S(1)\xi = X.$$

Olkoon

$$\begin{cases} \tilde{\theta}^1 = \bar{\theta}^1 + \xi, \\ \tilde{\theta}^2 = \bar{\theta}^2 - \xi, \\ \tilde{\theta}^k = \bar{\theta}^k, \qquad k \geq 3. \end{cases}$$

Tällöin $(\tilde{\theta}^1, \ldots, \tilde{\theta}^K)$ on sallittu. Konkaavisuuden nojalla

$$u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1\right) \leq u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1 + a\right) - u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1 + a\right)a,$$

joten

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left(u_1(S(1)\tilde{\theta}^1) - u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\right)\mathbb{1}(A)\right) \\ = \ & \mathbb{E}\left(\left(u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1 + a\right) - u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\right)\mathbb{1}(A)\right) \\ \geq \ & a\mathbb{E}\left(u_1'(S(1)\bar{\theta}^1 + a)\mathbb{1}(A)\right) \\ = \ & a\mathbb{E}\left(u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\mathbb{1}(A)\right)(1 + o_a(1)), \text{ kun } a \to 0+, \end{aligned}$$

missä $o_a(1)$ tarkoittaa kohti nollaa suppenevaa jonoa. Viimeisen vaiheen täsmällinen perustelu saadaan dominoidun konvergenssin lauseesta.

Analogisesti nähdään, että

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\left(u_1(S(1)\tilde{\theta}^1) - u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\right)\mathbb{1}(B)\right) \\ \geq \ & -b\mathbb{E}\left(u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\mathbb{1}(B)\right)(1 + o_b(1)), \text{ kun } b \to 0+. \end{aligned}$$

Yhdistämällä arviot saadaan

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(u_1(S(1)\tilde{\theta}^1) - u_1(S(1)\bar{\theta}^1)\right) \\ \geq \ & a\mathbb{E}\left(u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\mathbb{1}(A)\right)(1 + o_a(1)) - b\mathbb{E}\left(u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\mathbb{1}(B)\right)(1 + o_b(1)), \end{aligned}$$

kun $a, b \to 0+$. Tämä on aidosti positiivinen, jos

$$\frac{a}{b} > \frac{\mathbb{E}\left(u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\mathbb{1}(B)\right)(1 + o_b(1))}{\mathbb{E}\left(u_1'\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\mathbb{1}(A)\right)(1 + o_a(1))}. \tag{6.7}$$

Samalla tavalla nähdään, että

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(u_2(S(1)\tilde{\theta}^2) - u_1\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\right) \\ \geq \ & -a\mathbb{E}\left(u_2'\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\mathbb{1}(A)\right)(1 + o_a(1)) + b\mathbb{E}\left(u_2'\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\mathbb{1}(B)\right)(1 + o_b(1)). \end{aligned}$$

Tämä on aidosti positiivinen, jos

$$\frac{a}{b} < \frac{\mathbb{E}\left(u_2'\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\mathbb{1}(B)\right)(1 + o_b(1))}{\mathbb{E}\left(u_2'\left(S(1)\bar{\theta}^2\right)\mathbb{1}(A)\right)(1 + o_a(1))}. \tag{6.8}$$

Valitaan sopiva $c > 0$ ja $a = cb$ ja annetaan $b \to 0+$. Kun b on pieni, sekä (6.7) ja (6.8) toteutuvat. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(u_1(S(1)\tilde{\theta}^1)\right) &> \mathbb{E}\left(u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\right), \\
\mathbb{E}\left(u_2(S(1)\tilde{\theta}^2)\right) &> \mathbb{E}\left(u_2(S(1)\bar{\theta}^2)\right), \\
\mathbb{E}\left(u_k(S(1)\tilde{\theta}^k)\right) &= \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right), \qquad k \geq 3.
\end{aligned}$$

Siis $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ ei ole Pareto-optimaalinen, mikä on ristiriita. □

Lause 6.2. *Olkoot markkinat täydelliset ja toimijoiden utiliteettifunktiot aidosti konkaaveja. Silloin Pareto-optimaalisessa tilassa* $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ *pätee*

$$S(1)\bar{\theta}^k = f_k(A(1)), \qquad k = 1, \ldots, K, \tag{6.9}$$

missä $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on mitallinen funktio ja* $A(1)$ *markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1.*

Huomautus 6.1. Nähdään, että myös lauseen 6.1 funktio f riippuu tilasta ω ainoastaan arvon $A(1)$ välityksellä. Toisin sanoen

$$f(\omega) = g(A(1, \omega)),$$

missä g on positiivinen mitallinen funktio.

Lauseen todistusta varten palautetaan mieleen Jensenin epäyhtälö: jos u on aidosti konkaavi ja X ja Y rajoitettuja satunnaismuuttujia, niin

$$\mathbb{E}(u(X)|Y) \leq u(\mathbb{E}(X|Y)) \qquad \text{m.v.} \tag{6.10}$$

Lisäksi (6.10) pätee yhtäsuuruutena m.v. jos ja vain jos X on $\sigma(Y)$-mitallinen eli on muotoa $X = G(Y)$, missä $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

Todistus. (Lause 6.2). Esitetään todistus vain tapauksessa, jossa arvot $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Oletetaan, että $S(1)\bar{\theta}^1$ ei ole muotoa (6.9). Täydellisyyden nojalla voidaan määrätä salkut θ^k siten, että

$$S(1)\theta^k = \mathbb{E}\left(S(1)\bar{\theta}^k | A(1)\right), \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Tällöin

$$\sum_{k=1}^{K} S(1)\theta^k = \mathbb{E}(A(1)|A(1)) = A(1).$$

Lineaarisen riippumattomuuden nojalla allokointi $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$ on sallittu. Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)|A(1)\right) \leq u_k\left(S(1)\theta^k\right),\ k = 1, \ldots, K,$$

ja erisuuruus on aito positiivisella todennäköisyydellä, kun $k = 1$. Ottamalla odotusarvot puolittain saadaan

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) & \leq & \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\theta^k\right)\right), & k = 2, \ldots, K, \\ \mathbb{E}\left(u_1\left(S(1)\bar{\theta}^1\right)\right) & < & \mathbb{E}\left(u_1\left(S(1)\theta^k\right)\right). \end{cases}$$

Siis $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ ei ole Pareto-optimaalinen, mikä on ristiriita. □

Esimerkki 6.1. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot kvadraattisia,

$$u_k(z) = -\frac{1}{2}z^2 + b_k z, \qquad z \in \mathbb{R}, \tag{6.11}$$

missä $b_k > 0$ on vakio. Nämä eivät ole kasvavia koko $\mathbb{R}$:ssä, mutta ei välitetä siitä toistaiseksi. Ajatellaan kuitenkin, että parametrit b_k ovat suuria. Pyritään löytämään Pareto-optimaalisia allokointeja Borchin lauseen avulla.

Olkoon $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ sallittu allokointi. Lauseen 6.2 soveltamiseksi on etsittävä vakiot h_k ja funktio f siten, että

$$-S(1, \omega)\bar{\theta}^k + b_k = h_k f(\omega), \quad \forall k, \omega. \tag{6.12}$$

Olkoon $A(1, \omega)$ markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1 tilassa ω,

$$A(1, \omega) = \sum_{n=1}^{N} L_n S_n(1, \omega).$$

Merkitään

$$b = \sum_{k=1}^{K} b_k \quad \text{ja} \quad h = \sum_{k=1}^{K} h_k.$$

Laskemalla yhtälöt (6.12) yhteen saadaan

$$hf(\omega) = b - A(1, \omega).$$

Siis f on muotoa

$$f = h'(b - A(1)), \quad h' > 0.$$

Jotta f olisi positiivinen, on oltava $b > A(1)$ m.v. Ilman oleellista rajoitusta voidaan asettaa $h' = 1$, sillä Borchin lauseessa on joka tapauksessa vapaasti valittavissa parametrit $h_1, \ldots, h_K$, kunhan ne ovat positiivisia.

Pareto-optimaalisia allokointeja löydetään ratkaisemalla salkut $\bar{\theta}^k$ yhtälöistä

$$-S(1)\bar{\theta}^k + b_k = h_k(b - A(1)), \tag{6.13}$$

missä

$$\sum_{k=1}^{K} h_k = 1. \tag{6.14}$$

Jos toisaalta (6.14) toteutuu, niin ehdon (6.13) toteuttaville salkuille pätee

$$\sum_{k=1}^{K} S(1)\bar{\theta}^k = b - (b - A(1)) \sum_{k=1}^{K} h_k = A(1).$$

Siis (6.3) toteutuu. Vaatimus (6.1) toteutuu myös eräille salkuille, kuten kohdan 6 alussa todettiin.

On siis määrättävä $\bar{\theta}^k$ siten, että

$$S(1)\bar{\theta}^k = b_k - h_k(b - A(1)), \quad k = 1, \ldots, K, \tag{6.15}$$

missä vakiot h_k ovat positiivisia ja (6.14) toteutuu. Tämä onnistuu seuraavasti. Toimija k ottaa sopivan määrän bondeja salkkuunsa ja riskillisistä arvopapereista kustakin osuuden h_k.

Todetaan vielä, että jos $b > A(1)$ m.v. (kuten tulee olla) ja $\bar{\theta}^k$ on yhtälön (6.15) ratkaisu, niin

$$S(1)\bar{\theta}^k < b_k \text{ m.v.}$$

Siis $S(1)\bar{\theta}^k$ on funktion u_k kasvavuusalueessa m.v. Borchin lause antaa Pareto-optimaalisia allokointeja, jos oletuksen (6.11) utiliteettifunktioita muutetaan sopivasti, kun z on suuri.

Lisälähteitä kohtaan 6: LeRoy and Werner (2001) ja Bühlmann (1984).

7 Tasapainohinnoittelusta

Olkoot markkinat ja toimijat kuten kohdassa 6. Laajennetaan asetelmaa ottamalla malliin mukaan hetken 0 hinnat $S(0) = (S_1(0), \ldots, S_N(0))$.

Olkoon toimijan k salkku alkutilanteessa

$$\eta^k = (\eta_1^k, \ldots, \eta_N^k)^T.$$

Oletetaan, että kaikki arvopaperit ovat näiden toimijoiden hallussa eli että

$$\sum_{k=1}^{K} \eta^k = L.$$

Määritelmä 7.1. Systeemi $(\bar{S}(0), \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on *tasapainotila*, jos $\bar{S}(0) \in \mathbb{R}^N$ on hintavektori, $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ sallittu allokointi ja kaikilla $k = 1, \ldots, K$,

$$\begin{cases} \bar{S}(0)\bar{\theta}^k & \leq \bar{S}(0)\eta^k \\ \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) & = \max\left(\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\theta^k\right)\right) \mid \bar{S}(0)\theta^k \leq \bar{S}(0)\eta^k\right). \end{cases}$$

Tällöin $\bar{S}(0)$ on *tasapainohintavektori* ja $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ *tasapainoallokointi.*

Maksimointitehtävässä esiintyvää ehtoa

$$\bar{S}(0)\theta^k \leq \bar{S}(0)\eta^k \tag{7.1}$$

kutsutaan *budjettirajoitukseksi.* Kukin toimija pyrkii siis maksimoimaan hyötynsä tämän rajoituksen puitteissa. Tasapainotilassa tämä on mahdollista, sillä tällöin myös clearing-ehdot toteutuvat. Toimijan maksimointitehtävä on oleellisesti ottaen sama kuin kohdassa 5.1.3.

Selvää on, että (7.1) toteutuu tasapainotilassa yhtälönä. Nimittäin u_k on aidosti kasvava, joten aidon epäyhtälön tapauksessa hyötyä voitaisiin kasvattaa bondin avulla. Tasapainohinnat eivät ole yksikäsitteisiä. Jos $\bar{S}(0)$ on tällainen, niin samoin on $\alpha\bar{S}(0)$ kaikilla $\alpha > 0$. Tämä triviaali monikäsitteisyys poistuu, jos bondin vuosikorko kiinnitetään.

Todetaan vielä, että myös hinnat ovat määritelmässä 'vapaita' parametreja. Tasapainohinnoittelun tausta-ajatuksena on, että markkinoiden ajatellaan 'pyrkivän' kohti tasapainoa. Jos hinnat eivät ole alunperin tasapainohintoja, kaikki toimijat eivät pysty hankkimaan markkinoilta haluamaansa salkkua. Kysyntä ja tarjonta eivät yhdy, mikä aiheuttaa paineita hintojen muutoksille.

Teknisten yksityiskohtien vähentämiseksi oletetaan koko kappaleessa 7, että

$$|S_n(1)| \leq M \qquad \text{m.v.}, \ n = 1, \ldots, N, \tag{7.2}$$

missä M on vakio.

7.1 Tasapainohintojen ominaisuuksia

Palautetaan mieleen, että arvopaperi 1 on bondi eli että $S_1(1) = 1$ m.v. Seuraava tulos koskee bondia, mutta on yleisempikin.

Lemma 7.1. *Olkoon* $S_n(1) \geq 0$ *m.v. ja* $\mathbb{P}(S_n(1) > 0) > 0$. *Silloin tasapainotilassa* $\bar{S}_n(0) > 0$.

Todistus. Olkoon toimijan k salkku $\bar{\theta}^k = (\bar{\theta}^k_1, \ldots, \bar{\theta}^k_N)$ tasapainotilassa. Korvaamalla $\bar{\theta}^k_n$ $(\bar{\theta}^k_n + 1)$:llä toimijan budjettirajoitus toteutuu, jos $\bar{S}_n(0) \leq 0$. Hyöty kasvaa aidosti, koska u_k on aidosti kasvava. Tämä on ristiriita. □

Tutkitaan seuraavassa, millaiset hinnat voivat olla tasapainohintoja.

Lause 7.2. *Olkoon* $(\bar{S}(0), \bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ *tasapainotila. Silloin*

$$\bar{S}_n(0) = \frac{\mathbb{E}\left(S_n(1)u_k'(S(1)\bar{\theta}^k)\right)}{\mathbb{E}\left(u_k'(S(1)\bar{\theta}^k)\right)} \cdot \bar{S}_1(0), \tag{7.3}$$

kaikilla $n = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K$.

Huomautus 7.1. Lauseen tulos seuraa pelkästään toimijoiden salkun optimaalisuusvaatimuksesta. Optimissa (7.3) toteutuu markkinoiden hinnoille $\bar{S}_n(0)$.

Todistus. Lemman 7.1 nojalla bondin hinnalle pätee $\bar{S}_1(0) > 0$. Olkoon $n_0 = \{2, \dots, N\}$ kiinteä. Määritellään salkku $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ ehdoista

$$\begin{cases} \xi_{n_0} &= & 1, & \\ \xi_j &= & 0, & j \in \{2, \dots, N\} \setminus \{n_0\}, \\ \xi_1 &= & -\frac{\bar{S}_{n_0}(0)}{\bar{S}_1(0)}. & \end{cases}$$

Tällöin

$$\bar{S}(0)\xi = -\bar{S}_{n_0} + \bar{S}_{n_0} = 0.$$

Olkoon $\epsilon \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Salkku $\bar{\theta}^k + \epsilon\xi$ toteuttaa budjettirajoituksen, sillä

$$\bar{S}(0)(\bar{\theta}^k + \epsilon\xi) = \bar{S}(0)\bar{\theta}^k.$$

Tasapainotilan määritelmän nojalla

$$\mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)(\bar{\theta}^k + \epsilon\xi)\right)\right)$$

kaikilla $\epsilon \in \mathbb{R}$. Määritellään kuvaus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdosta

$$g(\epsilon) = \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)(\bar{\theta}^k + \epsilon\xi)\right)\right).$$

Tällöin $g'(0) = 0$. Koska

$$\begin{aligned} g'(\epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[\mathbb{E}\left(u_k\left(\sum_{n=1}^{N} S_n(1)\bar{\theta}_n^k + \epsilon S_{n_0}(1) - \epsilon\frac{\bar{S}_{n_0}(0)S_1(1)}{\bar{S}_1(0)}\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left(\left(S_{n_0}(1) - \frac{\bar{S}_{n_0}(0)S_1(1)}{\bar{S}_1(0)}\right)u_k'\left(S(1)(\bar{\theta}^k + \epsilon\xi)\right)\right), \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned} g'(0) &= \mathbb{E}\left(\left(S_{n_0}(1) - \frac{\bar{S}_{n_0}(0)S_1(1)}{\bar{S}_1(0)}\right)u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(S_{n_0}(1)u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) - \frac{\bar{S}_{n_0}(0)}{\bar{S}_1(0)}\mathbb{E}\left(u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right). \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä. □

Lause 7.3. *Tasapainotilassa markkinat ovat arbitraasivapaat.*

Todistus. Edellisen lauseen 7.2 nojalla

$$\phi_k(\omega) = \frac{u_k'\left(S(1,\omega)\bar{\theta}^k\right)\bar{S}_1(0)}{\mathbb{E}\left(u_k'(S(1)\bar{\theta}^k)\right)}, \quad \omega \in \Omega, \tag{7.4}$$

määrittelee hinnoittelijan. □

Tasapainotilassa hinnoittelu voidaan siis aina suorittaa hinnoittelijan avulla. Jo määritelmässä voitaisiin $\bar{S}(0)$ korvata hinnoittelijalla $\bar{\phi}$ ja puhua tasapainotilasta $(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$. Tasapainoallokoinnilta vaaditaan, että

$$\mathbb{E}\left(\bar{\phi}S(1)\bar{\theta}^k\right) \le \mathbb{E}\left(\bar{\phi}S(1)\eta^k\right), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Budjettirajoitus voidaan vastaavasti kirjoittaa muotoon

$$\mathbb{E}(\bar{\phi}S(1)\theta^k) \le \mathbb{E}(\bar{\phi}S(1)\eta^k).$$

Lauseen 7.3 todistuksesta nähdään, että jos $(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on tasapainotila, niin myös ϕ_k,

$$\phi_k(\omega) = \frac{u_k'\left(S(1,\omega)\bar{\theta}^k\right)\mathbb{E}\left(\bar{\phi}\right)}{\mathbb{E}\left(u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right)}, \quad \omega \in \Omega, \tag{7.5}$$

kelpaa hinnoittelijaksi.

Lause 7.4. *Olkoon $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ sallittu allokointi ja $\bar{\phi}$ positiivinen satunnaismuuttuja. Oletetaan, että*

$$\mathbb{E}\left(\bar{\phi}S(1)\bar{\theta}^k\right) = \mathbb{E}\left(\bar{\phi}S(1)\eta^k\right), \quad k = 1, \ldots, K. \tag{7.6}$$

Jos on olemassa sellaiset positiiviset vakiot $h_1, \ldots, h_K$, että

$$u_k'\left(S(1,\omega)\bar{\theta}^k\right) = h_k\bar{\phi}(\omega) \text{ m.v. }, \; k = 1, \ldots, K, \tag{7.7}$$

niin $(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on tasapainotila.

Oletetaan lisäksi, että markkinat ovat täydelliset. Silloin $(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on tasapainotila, jos ja vain jos on olemassa positiiviset vakiot $h_1, \ldots, h_K$, joille (7.7) *pätee.*

Todistus. Oletetaan (7.7). On osoitettava, että mielivaltaiselle budjettirajoituksen

$$\mathbb{E}\left(\bar{\phi}S(1)\theta^k\right) \le \mathbb{E}\left(\bar{\phi}S(1)\eta^k\right) \tag{7.8}$$

toteuttavalle salkulle pätee

$$\mathbb{E}\left(u_k(S(1)\theta^k)\right) \le \mathbb{E}\left(u_k(S(1)\bar{\theta}^k)\right).$$

Konkaavisuuden nojalla

$$\begin{aligned} u_k\left(S(1)\theta^k\right) &= u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k + S(1)(\theta^k - \bar{\theta}^k)\right) \\ &\leq u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right) + u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right) S(1)(\theta^k - \bar{\theta}^k) \\ &= u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right) + h_k\bar{\phi}S(1)(\theta^k - \bar{\theta}^k). \end{aligned}$$

Yhtälön (7.6) ja epäyhtälön (7.8) nojalla

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(u_k(S(1)\theta^k)\right) &\leq \mathbb{E}\left(u_k(S(1)\bar{\theta}^k)\right) \\ &+ h_k\left[\mathbb{E}(\bar{\phi}S(1)\theta^k) - \mathbb{E}(\bar{\phi}S(1)\bar{\theta}^k)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left(u_k\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right). \end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että markkinat ovat täydelliset ja että $(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on tasapainotila. On todistettava (7.7). Lauseen 7.2 nojalla kaavan (7.5) ϕ_k on hinnoittelija, $k = 1, \ldots, K$. Lauseen 5.6 nojalla $\phi_k = \bar{\phi}$ m.v., joten

$$\frac{u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\mathbb{E}\left(\bar{\phi}\right)}{\mathbb{E}\left(u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right)} = \bar{\phi} \quad \text{m.v.}$$

Voidaan siis valita

$$h_k = \frac{\mathbb{E}\left(u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right)}{\mathbb{E}\left(\bar{\phi}\right)}.$$

□

Täysin selvää ei ole, etteivätkö toimijat pystyisi lisäämään hyötyjään jollain muulla tavalla kuin käymällä kauppaa markkinahinnoin. Tasapainotilassa tämä ei onnistu ainakaan arvopapereiden vaihtokaupoilla.

Lause 7.5. *Jos* $(\bar{S}(0), \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ *on tasapainotila, niin* $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ *on Pareto-optimaalinen allokointi.*

Todistus. Oletetaan, että olisi clearing-ehdon täyttävä allokointi $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$, joka toteuttaa ehdot (6.2) siten, että jokin epäyhtälö on aito. Tällöin välttämättä

$$\bar{S}(0)\theta^k > \bar{S}(0)\bar{\theta}^k$$

jollain $k \in \{1, \ldots, K\}$. Clearing-ehtojen nojalla

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \bar{S}(0)\theta^k &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} \bar{S}_n(0)\theta_n^k \\ &= \sum_{n=1}^{N} \bar{S}_n(0)L_n = \sum_{k=1}^{K} \bar{S}(0)\bar{\theta}^k. \end{aligned}$$

Nähdään, että on olemassa sellainen k_0, että

$$\bar{S}(0)\theta^{k_0} < \bar{S}(0)\bar{\theta}^{k_0}.$$

Tarkastellaan salkkua $\tilde{\theta}^{k_0}$,

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1^{k_0} = \theta_1^{k_0} + \frac{\bar{S}(0)(\bar{\theta}^{k_0} - \theta^{k_0})}{\bar{S}_1(0)}, \\ \tilde{\theta}_n^{k_0} = \theta_n^{k_0}, \quad n = 2, \dots, N. \end{cases}$$

Tällöin $\bar{S}(0)\tilde{\theta}^{k_0} = \bar{S}(0)\bar{\theta}^{k_0}$, joten budjettirajoitus toteutuu. Lisäksi

$$S(1,\omega)\tilde{\theta}^{k_0} = S(1,\omega)\theta^{k_0} + \frac{\bar{S}(0)(\bar{\theta}^{k_0} - \theta^{k_0})}{\bar{S}_1(0)} > S(1,\omega)\theta^{k_0}, \quad \forall \omega.$$

Koska u_{k_0} on aidosti kasvava, on myös

$$\mathbb{E}\left(u_{k_0}(S(1)\tilde{\theta}^{k_0})\right) > \mathbb{E}\left(u_{k_0}\left(S(1)\theta^{k_0}\right)\right).$$

Vastaoletuksen nojalla

$$\mathbb{E}\left(u_{k_0}\left(S(1)\theta^{k_0}\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(u_{k_0}\left(S(1)\bar{\theta}^{k_0}\right)\right).$$

Siis

$$\mathbb{E}\left(u_{k_0}(S(1)\tilde{\theta}^{k_0})\right) > \mathbb{E}\left(u_{k_0}\left(S(1)\bar{\theta}^{k_0}\right)\right).$$

Saatiin ristiriita, koska $\tilde{\theta}^{k_0}$ toteuttaa budjettirajoituksen. □

Esimerkki 7.1. Olkoot toimijoiden utiliteetifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = -\frac{1}{2}z^2 + b_k z, \qquad z \in \mathbb{R},$$

missä $b_k > 0$ on vakio, $k = 1, \dots, K$. Ei välitetä toistaiseksi siitä, että nämä eivät ole kaikkialla kasvavia.

Olkoon $(\bar{S}(0), \bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ tasapainotila. Lauseen 7.2 nojalla ϕ_k,

$$\begin{aligned} \phi_k(\omega) &= \frac{u_k'\left(S(1,\omega)\bar{\theta}^k\right)\bar{S}_1(0)}{\mathbb{E}\left(u_k'\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right)} \\ &= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{b_k - S(1,\omega)\bar{\theta}^k}{b_k - \mathbb{E}\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)}, \quad \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

on ehdokas hinnoittelijaksi, $k = 1, \dots, K$. Jos $\lambda_1 + \dots + \lambda_K = 1$ ja

$$\phi(\omega) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \phi_k(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

niin ϕ on hinnoittelija. Merkitään

$$\begin{aligned} d &= \sum_{k=1}^{K} \left(b_k - \mathbb{E}\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)\right) \\ &= b - \mathbb{E}\left(A(1)\right), \end{aligned}$$

missä $b = \sum_{k=1}^{K} b_k$ ja $A(1)$ on markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1. Oletetaan, että $d > 0$. Valitaan

$$\lambda_k = \frac{b_k - \mathbb{E}\left(S(1)\bar{\theta}^k\right)}{d},$$

jolloin

$$\phi(\omega) = \frac{1}{d(1+i)}(b - A(1,\omega)). \tag{7.9}$$

Tasapainotilassa hinnoittelu voidaan siis suorittaa tyyppiä vakio$\times(b - A(1))$ olevalla hinnoittelijalla. Tällöin on oltava $b > A(1)$ m.v.

Olkoon $i = 0$, jolloin $\mathbb{E}(\phi) = 1$. Tasapainoehdokkaita voidaan tuottaa lauseen 7.4 avulla. Pyritään löytämään salkkuja, jotka toteuttavat ehdon (7.7). Toisin sanoen on oltava

$$-S(1)\bar{\theta}^k + b_k = h_k \frac{b - A(1)}{d}.$$

Näin on ja $h_k > 0$ ainakin, jos

$$S(1)\bar{\theta}^k = b_k - d_k(b - A(1)), \tag{7.10}$$

missä $d_k > 0$. Lisäksi vaatimuksen (7.6) on toteuduttava eli on oltava

$$\mathbb{E}\left(\frac{b - A(1)}{d}(b_k - d_k(b - A(1))\right) = \mathbb{E}\left(\frac{b - A(1)}{d}S(1)\eta^k\right).$$

Ainut vaihtoehto on valita

$$d_k = \frac{\mathbb{E}(b_k(b - A(1))) - \mathbb{E}\left((b - A(1))S(1)\eta^k\right)}{\mathbb{E}((b - A(1))^2)}.$$

Selvästi $\sum_{k=1}^{K} d_k = 1$. Oletetaan, että

$$b_k > S(1)\eta^k \quad \text{m.v.}$$

Tällöin $d_k > 0$ ja tasapainosalkut määräytyvät yhtälöistä

$$S(1)\bar{\theta}^k = c_k + d_k A(1),$$

missä vakiot c_k ja d_k ovat yksikäsitteisiä ja toteuttavat ehdot

$$\sum_{k=1}^{K} c_k = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{K} d_k = 1. \tag{7.11}$$

Utiliteettifunktiot saadaan kaikkialla aidosti kasvaviksi sopivalla muunnoksella, kuten esimerkissä 6.1 todettiin.

Esimerkin 6.1 nojalla clearing-ehdot toteutuvat, jos $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Ellei näin ole, voidaan konstruoida kohdan 6 alkuosan mukaisesti φ-salkut, jotka antavat tasapainotilan.

Lisälähteitä kohtaan 7: LeRoy and Werner (2001) ja Bühlmann (1984).

8 Capital asset pricing -malli (CAPM)

CAPM lienee tunnetuin arvopapereiden hinnoittelumalli. Tausta-ajatuksena on, että sijoittaja pyrkii minimoimaan riskin, kun tuottotaso on annettu. Kääntäen, sijoittaja pyrkii maksimoimaan tuoton, kun riskitaso on annettu. Riskiä mitataan mallissa varianssilla. Yksinkertaisen mittarin ansiosta saatava malli on havainnollinen ja kohtuullisin ponnistuksin sovellettavissa.

Mallin kehittely muodostuu kahdesta vaiheesta. Esnimmäisenä askeleena tarkastellaan salkun valintaa, niin sanottua Markowitzin teoriaa. Tähän perustuen johdetaan esitykset arvopapereiden hinnoille toisena vaiheena.

Olkoot arvopaperimarkkinat kohdan 5.1 alun mukaiset. Oletetaan koko kappaleessa 8, että

$$\mathrm{Var}(S_n(1)) < \infty, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Arvopaperi 1 oletetaan nollakuponkibondiksi vuosikorolla $i \geq 0$. Oletetaan lisäksi, että hinnat hetkellä 0 ovat positiivisia eli että

$$S_n(0) > 0, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

8.1 Odotusarvo-/varianssiperiaate

CAP-mallissa salkkuja arvostellaan tuoton ja riskin perusteella. Tuottoa mitataan odotusarvolla ja riskiä varianssilla.

Arvopapereiden lukumäärien sijasta on kohdan 5.1.3 tapaan mukavampi tarkastella arvopaperiin sijoitettavaa rahamäärää ja salkun jakaumaa euroilla mitattuna. Olkoon $x > 0$ sijoitettava kokonaisrahamäärä. Oletetaan, että tästä määrä x_n sijoitetaan arvopaperiin n (x_n voi olla myös negatiivinen). Siis

$$x = x_1 + \cdots + x_N.$$

Arvopaperisalkussa hetkellä 0 on siis $x_n/S_n(0)$ kappaletta arvopaperia n. Merkitsemällä

$$w_n = \frac{x_n}{x}$$

saadaan vektori

$$W = (w_1, \dots, w_N)^T, \quad w_1 + \cdots + w_N = 1, \tag{8.1}$$

joka antaa sijoitusten jakauman rahalla mitattuna. Kutsutaan tätäkin *salkuksi*.

Olkoon R_n arvopaperin n ruottoaste kuten aiemminkin,

$$1 + R_n = \frac{S_n(1)}{S_n(0)}, \qquad n = 1, \dots, N. \tag{8.2}$$

Se on siis satunnaismuuttuja. Sijoitettavaa määrää x ja jakaumaa (8.1) vastaava tuottoaste $R(x, W)$ määritellään vastaavasti:

$$\begin{aligned} 1 + R(x, W) &= \frac{\text{sijoituksen arvo hetkellä 1}}{x} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N \frac{x_n}{S_n(0)} S_n(1)}{x} \\ &= \sum_{n=1}^N w_n \frac{S_n(1)}{S_n(0)} = 1 + \sum_{n=1}^N w_n R_n. \end{aligned}$$

Siis

$$R(x, W) = \sum_{n=1}^N w_n R_n.$$

Tämä riippuu vain osuuksista w_n, mutta ei sijoitettavasta määrästä x.

Kutsutaan tuottoasteen $R(x, W)$ odotusarvoa *odotustuotoksi* (tarkempi olisi odotustuottoaste). Merkitään

$$r_n = \mathbb{E}(R_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)}\right).$$

Tällöin salkkua W vastaava odotustuotto on

$$\mathbb{E}\left(R(x, W)\right) = \sum_{n=1}^N w_n r_n.$$

Salkkuun W liittyvää riskiä mitataan tuottoasteen varianssilla

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(W) = \mathrm{Var}\left(R(x, W)\right) \\ &= \mathrm{Var}\left(\sum_{n=1}^N w_n R_n\right). \end{aligned}$$

Salkun valintaongelma muotoillaan seuraavasti. Tarkastellaan kiinteää odotustuottoa r, jonka sijoittaja haluaa. Salkku W määrätään siten, että $\sigma^2(W)$ minimoituu tällä odotustuotolla. Tulkinnallisesti, annettua odotustuottoa vastaava salkku määrätään siten, että riski minimoituu.

Täsmällisemmin, salkku $W = (w_1, \ldots, w_N)^T$ määrätään siten, että

$$\begin{cases} \mathrm{Var}\left(\sum_{n=1}^N w_n R_n\right) = \min! \\ \sum_{n=1}^N w_n = 1, \\ \sum_{n=1}^N w_n r_n = r. \end{cases} \tag{8.3}$$

Parametrit r_n ja vektorin $(R_1, \ldots, R_N)^T$ kovarianssimatriisi oletetaan tunnetuiksi.

On helppo nähdä, että absoluuttisen tuoton

$$\sum_{n=1}^N \frac{x_n}{S_n(0)}(S_n(1) - S_n(0))$$

varianssi on

$$x^2 \mathrm{Var}\left(\sum_{n=1}^N w_n R_n\right).$$

Kun x on kiinteä, minimoi sama salkku sekä tuottoasteen että absoluuttisen tuoton varianssin.

8.2 Riskillisten arvopapereiden optimaaliset salkut

Ennen yleisen tehtävän (8.3) ratkaisemista tarkastellaan tilannetta, jossa markkinoilla on vain riskipitoisia arvopapereita. Muodollisesti tähän päästään vaatimalla tehtävässä (8.3) lisäksi, että $w_1 = 0$. Tehtävä on sama, kun summaukset aloitetaan indeksin n arvosta 2 ja unohdetaan w_1.

Olkoon

$$r_n = \mathbb{E}(R_n), \qquad n = 2, \ldots, N,$$

kuten aiemmin ja

$$C = (\mathbb{E}((R_n - r_n)(R_m - r_m))), \qquad n, m = 2, \ldots, N,$$

vektorin $\bar{R} = (R_2, \ldots, R_N)^T$ kovarianssimatriisi. Olkoon lisäksi

$$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Lause 8.1. *Oletetaan, että $r_n \neq r_m$ jollain $n, m \in \{2, \ldots, N\}$ ja että C on kääntyvä. Olkoon odotustuotto r annettu. Silloin lisärajoituksella $w_1 = 0$ tehtävän* (8.3) *minimaalinen varianssi $\sigma^2(r)$ on*

$$\sigma^2(r) = ar^2 + br + c,$$

missä a on positiivinen vakio ja diskriminantti $b^2 - 4ac$ on negatiivinen. Tarkemmin,

$$a = \frac{a'}{D}, \qquad b = -\frac{2b'}{D}, \qquad c = \frac{c'}{D},$$

missä

$$\begin{cases} a' = \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1},\ b' = \bar{r}^T C^{-1}\mathbf{1},\ c' = \bar{r}^T C^{-1}\bar{r}, \\ \bar{r} = (r_2, \ldots, r_N)^T, \\ D = a'c' - (b')^2 > 0. \end{cases}$$

Varianssin minimoiva salkku $W(r)$ on yksikäsitteinen ja

$$W(r) = C^{-1}(\lambda_1\bar{r} + \lambda_2\mathbf{1}),$$

missä

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a'r - b'}{D}, \\ \lambda_2 &= \frac{c' - b'r}{D}. \end{aligned}$$

Kuvassa 8.1 odotustuottoa r vastaa parabelin piste $(\sigma^2(r), r)$, joka antaa minimaalisen varianssin. Kaikki mahdolliset odotustuotto-/varianssiparit ovat viivoitetulla alueella. Pisteitä $(\sigma^2(r), r)$ vastaavia salkkuja kutsutaan seuraavassa *tehokkaiksi* (käyrän vastaava osa on 'efficient frontier').

Lauseen tekniset oletukset eivät merkitse oleellisia rajoituksia. Tarkastellaan näitä seuraavassa.

Oletetaan, että olisi $r_n = r_m, \forall n, m$. Tällöin sijoittaja voi valita vain yhden tuottovaatimuksen $r = r_2 = \ldots = r_N$. Tämä toteutuu kaikilla salkuilla, joten tehtävään (8.3) jää vain yksi rajoitus. Kaikkien sijoittajien salkut tulevat olemaan samanlaisia.

Oletetaan, että C ei ole kääntyvä. Tällöin voidaan määrätä sellainen

$$Y = (y_2, \ldots, y_N)^T \neq 0,$$

että

$$Y^T C Y = 0. \tag{8.4}$$

Toisaalta

$$\mathrm{Var}(Y^T\bar{R}) = Y^T C Y, \tag{8.5}$$

joten olisi

$$\sum_{n=2}^{N} y_n R_n = \text{ vakio.} \tag{8.6}$$

Myöhemmin arvopaperivalikoimaan lisätään nollakuponkibondi arvopaperiksi 1. Vuosikorko olkoon i. Tällöin tuottoaste on $R_1 = i$ ja voidaan määrätä y_1 siten, että

$$\sum_{n=1}^{N} y_n R_n = 0. \tag{8.7}$$

Tulosten (8.6) ja (8.7) vastineet pätevät myös arvoille $S_1(1), \ldots, S_N(1)$. Jokin arvopapereista on tällöin toistettavissa muiden avulla ja siis 'tarpeeton' itsenäisenä sijoituskohteena.

Todistus. (Lause 8.1) Asetetaan siis $w_1 = 0$ ja merkitään nyt

$$W = (w_2, \ldots, w_N)^T.$$

Olkoon lisäksi

$$\bar{r} = (r_2, \ldots, r_N)^T.$$

Tehtävä (8.3) saadaan muotoon

$$\begin{cases} W^T C W = \min! \\ W^T \mathbf{1} = 1, \\ W^T \bar{r} = r. \end{cases} \tag{8.8}$$

Oletuksista seuraa, että tehtävän rajoitukset täyttäviä vektoreita W on olemassa. Suoraviivaisesti nähdään myös, että minimi saavutetaan eräällä vektorilla $W \in \mathbb{R}^{N-1}$. Tässä toteutuvat välttämättömät optimaalisuusehdot.

Lagrangen kertoimien menetelmä antaa ehdot

$$\begin{cases} L = W^T C W + \lambda_1 (r - W^T \bar{r}) + \lambda_2 (1 - W^T \mathbf{1}) \\ \frac{\partial L}{\partial w_n} = 2 \sum_{m=2}^{N} w_m \mathrm{Cov}(R_n, R_m) - \lambda_1 r_n - \lambda_2 = 0, \quad n = 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Matriisimuodossa vaatimukset kaikkiaan ovat

$$\begin{cases} 2CW - \lambda_1 \bar{r} - \lambda_2 \mathbf{1} = 0, \\ W^T \mathbf{1} = 1, \\ W^T \bar{r} = r. \end{cases} \tag{8.9}$$

Siis

$$W = \frac{1}{2} C^{-1} (\lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 \mathbf{1}). \tag{8.10}$$

Sijoittamalla tämä kahteen viimeiseen yhtälöön saadaan λ_1 ja λ_2 ratkaistua:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \frac{a' r - b'}{a' c' - (b')^2}, \\ \lambda_2 = 2 \frac{c' - b' r}{a' c' - (b')^2}, \end{cases} \tag{8.11}$$

missä a', b' ja c' ovat lauseen mukaisia. Selvästi $a' > 0$ ja $c' > 0$. Lisäksi nimittäjä $a'c'-(b')^2$ on positiivinen. Nimittäin

$$(x, y) = x^T C^{-1} y$$

määrittelee sisätulon avaruudessa $\mathbb{R}^{N-1}$. Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Valitsemalla $x = \bar{r}$ ja $y = \mathbf{1}$ nähdään, että

$$(b')^2 \leq a'c'.$$

Erisuuruus on aito, koska $\bar{r}$ ja 1 ovat lineaarisesti riippumattomia.

Siis λ_1 ja λ_2 ovat hyvin määriteltyjä ja varianssin minimiarvo on tulosten (8.9), (8.10) ja (8.11) nojalla

$$\begin{aligned} W^T C W = \frac{1}{2} W^T(\lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 \mathbf{1}) \\ &= \frac{\lambda_1}{2} W^T \bar{r} + \frac{\lambda_2}{2} W^T \mathbf{1} \\ &= \frac{\lambda_1 r}{2} + \frac{\lambda_2}{2} \\ &= \frac{a'r^2 - 2b'r + c'}{a'c' - (b')^2}. \end{aligned}$$

Tämä on vaadittua muotoa.

Diskriminantti $b^2 - 4ac$ on negatiivinen, koska

$$\min \left\{ W^T C W \mid W \in \mathbb{R}^{N-1},\, W^T \mathbf{1} = 1 \right\} \geq 0. \tag{8.12}$$

Minimi saavutetaan ja C on kääntyvä. Näin ollen epäyhtälössä (8.12) erisuuruus on aito ja diskriminantti on negatiivinen. □

8.3 Optimaaliset salkut yleisessä tapauksessa

Palataan nyt kohdan 8.1 asetelmaan, missä siis arvopaperi 1 on nollakuponkibondi vuosikorolla i. Tavoittena on ratkaista minimointitehtävä (8.3).

Oletetaan, että $i \in [0, r_0)$ kuvan 8.2 mukaisesti. Tehtävän (8.3) salkut ovat muotoa

$$(1, w_2, \ldots, w_N)^T, \quad w_2 + \cdots + w_N = 0,$$

tai

$$(1 - w, w(w_2, \ldots, w_N))^T, \tag{8.13}$$

missä
$$w_2 + \cdots + w_N = 1 \quad \text{ja} \quad w \in \mathbb{R}.$$
Tarkastellaan vain tyypin (8.13) salkkuja seuraavassa. Odotustuotto on

$$(1-w)i + w \sum_{n=2}^{N} w_n r_n \tag{8.14}$$

ja tuottoasteen varianssi on

$$w^2 \mathrm{Var}\left(\sum_{n=2}^{N} w_n R_n\right). \tag{8.15}$$

Kuvan 8.2 käyrä vastaa kuvaa 8.1, mutta on esitetty (σ, r)- eikä (σ^2, r)-koordinaatistossa. On helppo nähdä, että syntyvä käyrä on aidosti kasvava ja aidosti konkaavi alueessa $r > r_0$. Lisäksi pisteen $(0, i)$ kautta kulkee täsmälleen yksi käyrää sivuava kasvava suora. Sivuamispistettä on merkitty symbolilla $(\sigma(r^*), r^*)$.

Lause 8.2. *Oletetaan, että $i \in [0, r_0)$ ja että lauseen 8.1 oletukset toteutuvat. Silloin annettua odotustuottoa $r > i$ vastaa yksikäsitteinen tuottoasteen varianssin minimoiva salkku. Tämä on muotoa*
$$\left(1-w, w(w_2^*, \ldots, w_N^*)\right)^T,$$
missä $w > 0$ ja $(w_2^*, \ldots, w_N^*)^T$ on pistettä $(\sigma(r^*), r^*)$ vastaava optimaalinen riskillisiä arvopapereita koskeva salkku. Odotustuottoa r vastaava w määräytyy ehdosta

$$r = (1-w)i + wr^*$$

ja salkkuun liittyvä hajonta on $w\sigma(r^*)$.

Todistus. Tarkastellaan tyyppiä (8.13) olevia salkkuja, jotka antavat odotustuoton r. Kiinteää parametrin w arvoa vastaava minimaalisen varianssin antava salkku $(w_2, \ldots, w_N)^T$ on tehokas vastaten pistettä $(\sigma^2(s), s)$ kuvan 8.1 käyrällä, missä

$$s = \frac{r - (1-w)i}{w}.$$

Minimin antava salkku on yksikäsitteinen. Nämä tulokset seuraavat lauseesta 8.1.

Olkoon aluksi $w > 0$. Tällöin salkun $\left(1-w, w(w_2, \ldots, w_N)\right)^T$

$$\begin{cases} \text{odotustuotto} & = (1-w)i + ws \\ & = i + \frac{s-i}{\sigma(s)} w\sigma(s) \qquad (= r), \\ \text{hajonta} & = w\sigma(s). \end{cases}$$

Tarkastellaan kuvan 8.2 pisteen $(\sigma(r^*), r^*)$ kautta kulkevaa suoraa. Olkoon w' sellainen, että $w'\sigma(r^*) = w\sigma(s)$. Siis

$$w' = \frac{w\sigma(s)}{\sigma(r^*)}.$$

Valitsemalla riskittömän arvopaperin painoksi $1 - w'$ ja salkku $(w_2, \ldots, w_N)^T$ pistettä $(\sigma(r^*), r^*)$ vastaavaksi saadaan

$$\begin{cases} \text{odotustuotto} & = (1-w')i + w'r^* \\ & = i + \frac{r^*-i}{\sigma(r^*)} w\sigma(s), \\ \text{hajonta} & = w\sigma(s). \end{cases}$$

Geometrisesti on konkaavisuuden nojalla ilmeistä, että

$$\frac{r^*-i}{\sigma(r^*)} \geq \frac{s-i}{\sigma(s)}$$

ja erisuuruus on aito paitsi, kun $s = r^*$.

Olkoon nyt $w < 0$ ja $w'\sigma(r^*) = |w|\sigma(s)$. Siis

$$w' = \frac{|w|\sigma(s)}{\sigma(r^*)} > 0.$$

Valitaan jälleen $(w_2, \ldots, w_N)^T$ vastaten pistettä $(\sigma(r^*), r^*)$ ja riskittömän arvopaperin painoksi w'. Saadaan

$$\begin{cases} \text{odotustuotto} & = (1-w')i + w'r^* \\ & = i + \frac{r^*-i}{\sigma(r^*)} |w|\sigma(s), \\ \text{hajonta} & = |w|\sigma(s). \end{cases}$$

Nyt

$$s = \frac{r-(1-w)i}{w} < \frac{i-(1-w)i}{w} = i.$$

Geometrisesti nähdään kuvasta 8.3, että

$$\frac{r^*-i}{\sigma(r^*)} > \frac{i-s}{\sigma(s)},$$

sillä käyrä on symmetrinen suoran $r = r_0$ suhteen. Siispä

$$\frac{r^*-i}{\sigma(r^*)}|w| > \frac{s-i}{\sigma(s)}w.$$

Odotustuotto on parempi, kuin alussa valitulla salkulla ja hajonta sama.

Edellä todetun nojalla w on valittava siten, että $s = r^*$. Siis

$$r = (1 - w)i + wr^*.$$

Muut muuttujan w valinnat antavat aidosti huonomman salkun. Tämä määrää myös yksikäsitteisesti riskillisten arvopaperien osuudet. □

Optimaaliset hajonta-/odotustuottoparit löydetään kuvan 8.2 tangentilta, jota kutsutaan *arvopaperimarkkinasuoraksi*. Tangenttipistettä $(\sigma(r^*), r^*)$ vastaavaa salkkua kutsutaan *markkinasalkuksi*.

Lauseen 8.2 mukaan toimijat sijoittavat odotustuottovaatimustaan vastaavasti varansa riskittömään arvopaperiin ja markkinasalkkuun. Strategiansa määräämiseksi sijoittajan on tiedettävä ainoastaan markkinasalkku ja siihen liittyvä odotustuotto.

8.4 Arvopapereiden hinnat CAP-mallissa

Oletetaan, että lauseen 8.2 ehdot on täytetty. Johdetaan esitykset odotustuotoille r_n markkinasalkun avulla. Arvopaperin hinnalle pätee kaavan (8.14) mukaisesti

$$S_n(0) = \frac{\mathbb{E}(S_n(1))}{1 + r_n}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

Lause 8.3. *Lauseen 8.2 oletuksin*

$$r_n = i + \beta_n(r^* - i), \tag{8.16}$$

missä

$$\beta_n = \frac{\mathrm{Cov}(R_n, R^*)}{\sigma^2(r^*)}. \tag{8.17}$$

Todistus. Tulos on triviaali, kun $n = 1$. Olkoon $n \in \{2, \dots, N\}$ kiinteä. Tarkastellaan salkkua, jossa arvopaperiin n sijoitetaan osa w ja markkinasalkkuun osa $1-w$. Parametria w vaihdellaan nollan ympäristössä. Olkoot $u(w)$ ja $v(w)$ odotustuotto ja hajonta,

$$\begin{aligned} u(w) &= wr_n + (1 - w)r^*, \\ v^2(w) &= w^2\mathrm{Var}(R_n) + (1 - w)^2\sigma^2(r^*) + 2w(1 - w)\mathrm{Cov}(R_n, R^*), \end{aligned}$$

missä R^* on markkinasalkun tuottoaste. Tällöin

$$\begin{aligned} u(0) &= r^*, \\ v^2(0) &= \sigma^2(r^*). \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavassa vain tapausta, jossa

$$r_n \neq r^* \quad \text{ja} \quad \mathrm{Cov}(R_n, R^*) \neq \sigma^2(r^*). \tag{8.18}$$

Tällöin edellä esitetty yhtälöpari määrittee odotustuoton u hajonnan v funktiona eräässä pisteen $w = 0$ ympäristössä. Lisäksi

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{u'(w)}{v'(w)} \\ &= \frac{2(r_n - r^*)}{\sigma_n^{-1}\left[2w\mathrm{Var}(R_n) - 2(1-w)\sigma^2(r^*) + 2(1-2w)\mathrm{Cov}(R_n, R^*)\right]}. \end{aligned}$$

Parit $(v(w), u(w))$ vastaavat salkkua, jossa ei ole riskitöntä arvopaperia. Ne sijaitsevat siis kuvan 8.2 viivoitetulla alueella. Ilmeisesti derivaatta du/dv yhtyy käyrän tangenttiin pisteessä $w = 0$. Näin ollen

$$\frac{r^* - i}{\sigma(r^*)} = \frac{(r_n - r^*)\sigma(r^*)}{\mathrm{Cov}(R_n, R^*) - \sigma^2(r^*)}.$$

Siis

$$r_n = i + \beta_n(r^* - i),$$

missä

$$\beta_n = \frac{\mathrm{Cov}(R_n, R^*)}{\sigma^2(r^*)}.$$

□

Lause 8.3 antaa odotustuotoille konkreettisen esityksen. Riskittömän tuoton ylittävää osaa

$$\beta_n(r^* - i)$$

kutsutaan *riskipreemioksi.* Esitykset (8.16) muodostavat CAP-mallin mukaiset hinnat.

Tulosta (8.16) tulee pitää ensisijaisesti odotustuottojen eräänä esityksenä. Lähtökohtana mallin kehittelyssä olivat annetut odotustuotot ja tuottoasteiden kovarianssit. Odotustuotoille saatiin esitykset (8.16) markkinasalkun avulla. Asiaa havainnollistaa seuraava esimerkki. Nähdään myös, että esitykset eivät takaa markkinoiden arbitraasivapautta.

Esimerkki 8.1. Olkoon markkinoilla nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja kaksi riskillistä arvopaperia. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ja arvopapereiden hinnat hetkellä 1 seuraavat:

$$\begin{cases} 1: & S_1(1,\omega_1) = \ \ 1, \quad S_1(1,\omega_2) = 1, \quad S_1(1,\omega_3) = 1, \\ 2: & S_2(1,\omega_1) = 11, \quad S_2(1,\omega_2) = 1, \quad S_2(1,\omega_3) = 0, \\ 3: & S_3(1,\omega_1) = \ \ 9, \quad S_3(1,\omega_2) = 0, \quad S_3(1,\omega_3) = 0. \end{cases}$$

Olkoon edelleen

$$S_1(0) = 1,\ S_2(0) = \frac{11}{9},\ S_3(0) = 1.$$

ja

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

Arbitraasivapaus edellyttäisi, että

$$\begin{cases} \psi(\omega_1) + \psi(\omega_2) + \psi(\omega_3) = 1 \\ 11\psi(\omega_1) + \psi(\omega_2) = \frac{11}{9} \\ 9\psi(\omega_1) = 1, \end{cases}$$

missä $\psi(\omega_m) > 0,\ m = 1, 2, 3$. Kahdesta viimeisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{cases} \psi(\omega_1) = \frac{1}{9} \\ \psi(\omega_2) = \frac{11}{9} - 11\psi(\omega_1) = 0. \end{cases}$$

Siis markkinoilla on arbitraasimahdollisuus.

Odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi riskillisille arvopapereille ovat

$$\bar{r} = (r_2\ r_3)^T = (25/11\ \ 2)^T$$

$$C = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 1\,998 & 2\,079 \\ 2\,079 & 2\,178 \end{pmatrix}.$$

Nähdään, että $\det C = 243$, joten lauseen 8.1 oletukset on täytetty.

Minimointitehtävä (8.8) degeneroituu, koska rajoitukset toteuttavia salkkuja on vain yksi, nimittäin

$$W = \frac{1}{3}(11r - 22 \quad 25 - 11r)^T.$$

Odotustuottoa r vastaava varianssi on

$$\sigma^2(r) = 2r^2 - 14r + 38.$$

Nähdään, että

$$r_0 = 7/2 > i.$$

Määrätään seuraavaksi markkinasalkku, kun $i = 0$. Olkoon $k > 0$ arvopaperimarkkinasuoran kulmakerroin. Vaatimus on, että yhtälöllä

$$\frac{r^2}{k^2} = 2r^2 - 14r + 38$$

on tasan yksi ratkaisu $r = r^*$. Diskriminanttiehdosta saadaan

$$k = \sqrt{\frac{38}{27}}.$$

Tätä vastaa sivuamispiste

$$\begin{cases} r^* = \frac{38}{7} \\ \sigma^2(r^*) = \frac{1\,026}{49}. \end{cases}$$

Markkinasalkku on

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{3}(11r^* - 22 \quad 25 - 11r^*)^T \\ &= \frac{1}{7}(88 \quad -81)^T. \end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(R_2, R^*) &= \mathrm{Cov}(R_2, 88R_2/7) + \mathrm{Cov}(R_2, -81R_3/7) \\ &= \frac{1}{7}\left(88\mathrm{Var}R_2 - 81\mathrm{Cov}(R_2, R_3)\right) = \frac{675}{77}, \\ \mathrm{Cov}(R_3, R^*) &= \frac{594}{77}. \end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{cases} \beta_2 = \frac{675}{77\sigma^2(r^*)} = \frac{175}{418}, \\ \beta_3 = \frac{7}{19}. \end{cases}$$

Kaava (8.16) pätee kuten pitääkin,

$$\begin{cases} r_2 = \beta_2 r^* = \frac{25}{11}, \\ r_3 = \beta_3 r^* = 2. \end{cases}$$

8.5 Tasapainoteorian näkökulma CAP-malliin

CAP-mallin lähtökohta muistuttaa tasapainoteoriassa esitettyä toimijoiden salkunvalintaongelmaa. Mallissa tavoitteena ei kuitenkaan ole hyödyn maksimointi, vaan varianssin minimointi.

Edellä päädyttiin tulokseen, jossa kaikki toimijat pyrkivät hankkimaan markkinasalkun ja riskittömän arvopaperin yhdistelmän. Usein ajatellaan, että markkinasalkku on juuri riskillisten arvopapereiden jakauma koko markkinoilla euroilla mitattuna. Tämä on välttämätöntä, että toimijat pystyisivät minimoimaan salkkunsa varianssin. Tasapainoteorian vastine on vaatimus clearing-ehtojen toteutumisesta. Mikäli tällaiset vaatimukset lisätään CAP-malliin, ollaan jo lähellä tasapainotilan käsitettä.

Tuotetaan seuraavassa CAP-mallin hinnat tasapainoteorian avulla. Olkoot toimijat $1, \ldots, K$, utiliteettifunktiot $u_1, \ldots, u_K$ ja arvopapereiden lukumäärät $L_1, \ldots, L_N$ kuten kohdassa 6.

Todistetaan aluksi yleishyödyllinen lemma.

Lemma 8.4. *Oletetaan, että lauseen 8.2 ehdot on täytetty. Olkoon $W' = (w'_2, \ldots, w'_N)^T$ riskillisten arvopapereiden muodostama salkku ja*

$$R' = \sum_{n=2}^{N} w'_n R_n$$

salkun tuottoaste. Oletetaan, että

$$r_n = i + \frac{\operatorname{Cov}(R_n, R')}{\operatorname{Var}(R')} \left(\mathbb{E}(R') - i\right).$$

Silloin W' on markkinasalkku.

Todistus. Lauseen 8.3 nojalla

$$r_n = i + \frac{\operatorname{Cov}(R_n, R^*)}{\operatorname{Var}(R^*)} \left(\mathbb{E}(R^*) - i\right),$$

missä R^* on markkinasalkun $(w_2^*, \dots, w_N^*)^T$ tuottoaste. Nähdään, että

$$\operatorname{Cov}(R_n, R') = \alpha \operatorname{Cov}(R_n, R^*), \quad n = 2, \dots, N,$$

missä

$$\alpha = \frac{\operatorname{Var}(R')}{\operatorname{Var}(R^*)} \cdot \frac{\mathbb{E}(R^*) - i}{\mathbb{E}(R') - i}.$$

Toisin sanoen

$$\operatorname{Cov}\left(R_n, \sum_{m=2}^N w'_m R_m\right) = \alpha \operatorname{Cov}\left(R_n, \sum_{m=2}^N w^*_m R_m\right).$$

Olkoon C vektorin $(R_2, \dots, R_N)^T$ kovarianssimatriisi kuten aiemminkin. Edellä saadun tuloksen nojalla

$$CW' = \alpha C W^*.$$

Koska C on kääntyvä, on välttämättä $W' = \alpha W^*$. Koska kummankin vektorin komponentit summautuvat ykköseksi, on oltava $\alpha = 1$. $\square$

Lause 8.5. *Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot kvadraattisia,*

$$u_k(z) = -\frac{1}{2}z^2 + b_k z, \qquad z \in \mathbb{R}, \;\; k = 1, \dots, K,$$

missä $b_1, \dots, b_K$ ovat positiivisia vakioita. Oletetaan, että markkinat ovat tasapainotilassa $(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ ja että

$$S(1,\omega)\bar{\theta}^k < b_k \text{ m.v.}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Olkoon $i \geq 0$ vuosikorko, R_n arvopaperin n tuottoaste sekä

$$\begin{aligned} W' &= (w'_2, \dots, w'_N)^T \\ &= \left(\sum_{n=2}^N S_n(0) L_n\right)^{-1} (S_2(0)L_2, \dots, S_N(0)L_N)^T, \\ R' &= \sum_{n=2}^N w'_n R_n. \end{aligned}$$

Silloin

$$\mathbb{E}(R_n) = i + \frac{\mathrm{Cov}(R_n, R')}{\mathrm{Var}(R')} \left(\mathbb{E}(R') - i\right).$$

Todistus. Selvästi

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(R_n, \bar{\phi}) &= \mathbb{E}(R_n\bar{\phi}) - \mathbb{E}(R_n)\mathbb{E}(\bar{\phi}) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n(1)}{\mathbb{E}(\bar{\phi}S_n(1))} - 1\right)\bar{\phi}\right) - \mathbb{E}(R_n)\mathbb{E}(\bar{\phi}) \\ &= 1 - (1 + \mathbb{E}(R_n))\mathbb{E}(\bar{\phi}).\end{aligned}$$

Koska $\mathbb{E}(\bar{\phi}) = \frac{1}{1+i}$, niin

$$\mathrm{Cov}(R_n, \bar{\phi}) = \frac{i - \mathbb{E}(R_n)}{1+i}.$$

Vastaavasti

$$\mathrm{Cov}(R', \bar{\phi}) = \frac{i - \mathbb{E}(R')}{1+i}.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\mathbb{E}(R_n) - i = \frac{\mathrm{Cov}(R_n, \bar{\phi})}{\mathrm{Cov}(R', \bar{\phi})} (\mathbb{E}(R') - i).$$

Kovarianssien suhde edellä ei riipu hinnoittelijasta. Esimerkin 7.1 nojalla voidaan valita

$$\bar{\phi}(\omega) = \alpha - \gamma R'(\omega), \qquad \forall\omega \in \Omega,$$

missä α ja $\gamma \neq 0$ ovat sopivia vakioita. Tällöin

$$\mathrm{Cov}(R_n, \bar{\phi}) = -\gamma\mathrm{Cov}(R_n, R')$$

ja

$$\mathrm{Cov}(R', \bar{\phi}) = -\gamma\mathrm{Var}(R').$$

Väite seuraa näistä tuloksista. □

Jos lemman 8.4 oletukset on täytettty, on markkinoiden kaikkien riskillisten arvopapereiden muodostama salkku edellä markkinasalkku. Esimerkin 7.1 nojalla toimijan k eräs tasapainosalkku saadaan yhtälöstä

$$S(1)\bar{\theta}^k = c_k + d_k A(1),$$

missä $d_k > 0$. Lisäksi

$$\sum_{k=1}^{K} c_k = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{K} d_k = 1.$$

Toimijoiden salkut ovat siis CAP-mallin mukaisia. Utiliteettifunktiot määräävät myös toimijoiden odotustuotot.

Lisälähteitä kohtaan 8: Huang and Litzenberger (1988), Daykin et al. (1994) ja LeRoy and Werner (2001).

9 Vakuutusten hinnoittelusta

Vakuutusten hinnoittelussa on piirteitä, jotka eivät sisälly mihinkään tähän mennessä esitettyihin tarkasteluihin. Rajoitutaan seuraavassa tuotteiden ja teorioiden samankaltaisuuksien ja eroavaisuuksien kuvaamiseen yleisellä tasolla.

Perusasetelmassa *vakuutusyhtiö* sitoutuu korvaamaan esimerkiksi yhden vuoden aikana *vakuutetulle* syntyvät sopimuksessa määritellyt taloudelliset menetykset. Vastikkeena *korvauksille* vakuutettu maksaa yhtiölle sopimuksesta *vakuutusmaksun.*

Tarkastellaan esimerkkinä omakotitalon palovakuutusta. Vakuutetulle vuoden aikana tulipaloista syntyneet taloudelliset menetykset on luonnollista kuvata ei-negatiivisena satunnaismuuttujana X. Kutsutaan tätä vakuutetun *kokonaisvahinkomääräksi.* Vakuutusmaksun määräämisessä nojaudutaan johonkin *tariffiperiaatteeseen* (hinnoitteluperiaatteeseen). Olkoon $P = P(X)$ vakuutusmaksu. Tällöin voisi olla esimerkiksi

$$P = \mathbb{E}(X) + \alpha\mathbb{E}(X) \tag{9.1}$$

tai

$$P = \mathbb{E}(X) + \beta\mathrm{Var}(X), \tag{9.2}$$

missä α ja β ovat vakuutetusta riippumattomia positiivisia vakioita. Kaavaa (9.1) kutsutaan *odotusarvoperiaatteeksi* ja kaavaa (9.2) *varianssiperiaatteeksi.* Odotusarvon ylittävää osaa $\alpha\mathbb{E}(X)$ tai $\beta\mathrm{Var}(X)$ kutsutaan *varmuuslisäksi.* Positiivista varmuuslisää voidaan perustella esimerkiksi utiliteettiteorian avulla. Lisäksi maksuun sisällytetään erä hallintokustannuksia varten. Näitä ei seuraavassa käsitellä.

Keskeinen ajatus vakuutustoiminnassa on, että yhdistämällä riippumattomia vakuutettuja tapahtuu kokonaisuudessa tietynlaista tasoittumista. Tätä voidaan perustella suurten lukujen lain avulla. Erityisesti pienenkin varmuuslisän turvin vakuutusmaksujen summa ylittää korvausten kokonaismäärän suurella todennäköisyydellä suuressa vakuutuskannassa, mikäli esimerkiksi vakuutettujen kokonaisvahinkomäärät ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Vakuutussopimuksiin liittyvä riski voidaan tässä mielessä *hajauttaa.* Sijoitustoiminnassa vastaavanlainen hajauttaminen on tavallisesti vain osittain mahdollista. Esimerkiksi kohdassa 8 päädyttiin siihen, että sijoittajalle jää aina markkinasalkun osuutta vastaava riski. Tästä ei päästä eroon muodostamalla suurempia salkkuja. Todettakoon, että vakuutustoimintaankin sisältyy samantyyppisiä ei-hajautettavissa olevia riskejä. Näitä ei käsitellä tässä yhteydessä.

9.1 Vertailua arbitraasiteoriaan

Arbitraasimahdollisuutta ei tyypillisesti synny kaavojen (9.1) ja (9.2) mukaisissa hinnoittelumalleissa. Näin on myös suurissa vakuutuskannoissa, koska vakuutettujen kokonaisvahinkomäärät ovat yleensä riittävän riippumattomia toisistaan. Vakuutusyhtiöllä on arbitraasi yksittäisessä sopimuksessa, jos

$$P = P(X) > X \qquad \text{m.v.}$$

Yleensä P on kuitenkin oleellisesti pienempi kuin suurin mahdollinen kokonaisvahinkomäärä. Samoin tavallisesti $P > 0$ ja $\mathbb{P}(X = 0) > 0$. Myöskään vakuutetulla ei siis ole arbitraasimahdollisuutta.

Konkretisoidaan arbitraasiteorian ja vakuutusten hinnoitteluteorian eroja yksinkertaisella esimerkillä. Tarkastellaan edellä esitettyä omakotitalon palovakuutusta. Alkuasetelmassa ennen vakuutuksen ottamista talon omistajan taloudellisia näkymiä voidaan kuvata seuraavasti:

$$\begin{tikzcd} & \gamma & (\omega_2, \quad \text{talo ei pala}) \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & 0 & (\omega_1, \quad \text{talo palaa}) \end{tikzcd}$$

Hetkellä 0 talon arvo on 1. Hetkellä 1 talon arvo on 0, mikäli se on palanut ja γ muuten. Tässä γ sisältää talon arvon lisäksi vuoden aikana saadut 'tuotot'. Nämä voidaan ajatella esimerkiksi saaduiksi vuokriksi. Oletetaan, että $\gamma > 1$. Edellä omakotitalo on ajateltu sijoituskohteeksi. Olkoon $\mathbb{P}(\omega_1) = p$ ja $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$, missä $p \in (0, 1)$.

Oletetaan, että toimiaja haluaa pienentää omistukseensa sisältyvää riskiä. Tätä varten tehdään vakuutussopimus. Mikäli talo palaa, vakuutusyhtiö korvaa määrän $X - M$, missä M on toimijan omalla vastuullaan pitämä osuus palovahingoista. Tulipalon sattuessa korvattava määrä ei ole tarkkaan ottaen $\gamma - M$, mutta ero ajatellaan seuraavassa merkityksettömäksi. Vakuutusyhtiö korvaa siis määrän

$$\begin{aligned} X_M &= \max(X - M, 0) \\ &= \begin{cases} \gamma - M, & \text{jos talo palaa} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vakuutuksen hinta olkoon odotusarvoperiaatteen mukainen,

$$P = P_M = \mathbb{E}(X_M) + \alpha\mathbb{E}(X_M).$$

Tällöin

$$P_M = (1 + \alpha)p(\gamma - M). \tag{9.3}$$

Sopimuksen arvoja kuvaa seuraava kaavio.

$$\begin{tikzcd} & 0 & (\omega_2, \quad \text{talo ei pala}) \\ P_M \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \gamma - M & (\omega_1, \quad \text{talo palaa}) \end{tikzcd}$$

Tätä voidaan pitää alkuperäisen sijoituksen johdannaisena.

Tarkastellaan nyt osaketta, jonka hinta hetkellä 0 ja tulevaisuuden näkymät ovat samat kuin talolla. Todennäköisyydellä p alla oleva yhtiö tekee konkurssin, jolloin osake menettää arvonsa. Kuvatkoon tätä tila ω_2'. Toisena vaihtoehtona osakkeen arvo on γ hetkellä 1. Tätä kuvaa tila ω_1'. Hetken 1 arvoja kuvaava kaavio on

$$\begin{tikzcd} & \gamma & (\omega_2', \quad \text{ei konkurssia}) \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & 0 & (\omega_1', \quad \text{konkurssi}) \end{tikzcd}$$

Olkoon $\mathbb{P}(\omega_1') = p$.

Toimija voi nyt suojautua konkurssitilaa vastaan hankkimalla myyntioption. Olkoon tämä sellainen, että hetkellä 1 haltijalla on oikeus myydä osake hintaan $\gamma - M$. Oletetaan, että $\gamma > M > 0$. Sopimuksen arvo ilmenee seuraavasta kaaviosta.

$$\begin{tikzcd} & 0 & (\omega_2', \quad \text{ei konkurssia}) \\ S(0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \gamma - M & (\omega_1', \quad \text{konkurssi}) \end{tikzcd}$$

Oletetaan, että markkinoilla on vuoden nollakuponkibondi. Vuosikorko olkoon $i = 0$. Option hinta on tällöin

$$S(0) = \gamma - 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) M. \tag{9.4}$$

Tämä seuraa arbitraasivapausoletuksesta.

Olkoon $S(1)$ option arvo hetkellä 1. Tällöin $S(1)$ ja X_M ovat samoin jakautuneita. Hinnat $S(0)$ ja P_M poikkeavat yleensä toisistaan. Tulos tuntuu ristiriitaiselta, koska sopimukset velvoittavat samankokoisiin suorituksiin samoilla todennäköisyyksillä.

Ero hinnoissa johtuu osakkeisiin oletetusta kaupankäyntimahdollisuudesta. Markkinoilta on saatavissa haluttu määrä saman yhtiön osakkeita, jotka korreloivat sataprosenttisesti sijoittajan hallussa olevan osakkeen kanssa. Tämä antaa mahdollisuuden suojautumiseen, tässä tapauksessa jopa täydelliseen. Vakuutuksessa korreloivia taloja ei löydy.

9.2 Henkivakuutuksen yhteyksiä arvopaperimarkkinoihin

Tarkastellaan lyhyesti perinteistä ja sijoitussidonnaista henkivakuutusta. Edellisessä vakuutusyhtiön maksamat korvaukset ovat deterministisiä ja jälkimmäisessä arvopapereiden kurssikehityksestä riippuvia.

9.2.1 Perinteinen elämänvaravakuutus

Perinteinen elämänvaravakuutus maksaa vakuutetulle sovittuna ajanhetkenä kiinteän sopimuksen mukaisen summan, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Täsmällisemmin, maksettava määrä X on

$$X = M1(\tau > T),$$

missä T ja M ovat sovittu maksuhetki ja maksettava rahamäärä sekä τ vakuutetun jäljellä oleva elinaika. Oletetaan, että vakuutusmaksu maksetaan hetkellä 0. Ellei sijoitustoiminnan tuottoja oteta huomioon, määräytyy vakuutusmaksu P esimerkiksi kaavasta

$$P = (1+\alpha)\mathbb{E}(X) = (1+\alpha)qM,$$

missä $q = \mathbb{P}(\tau > T)$. Kyseessä on odotusarvoperiaate.

Jos tällaisia vakuutuksia tehdään N kappaletta, niin kokonaisuudessaan maksettava määrä X_N on

$$X_N = M\sum_{j=1}^{N} 1(\tau_j > T),$$

missä τ_j on vakuutetun j jäljellä oleva elinaika. Oletetaan, että $\tau_1, \ldots, \tau_N$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Selvästi

$$\mathbb{E}(M1(\tau_j > T)) = qM.$$

Vakuutusmaksut yhteensä ovat $(1+\alpha)qMN$. Todennäköisyys sille, että X_N ylittää tämän on

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_N}{N} > (1+\alpha)qM\right) \to 0, \qquad \text{kun } N \to \infty. \tag{9.5}$$

Tämä seuraa suurten lukujen laista. Siis yhdistämällä suuri joukko vakuutettuja päästään tilanteeseen, jossa vakuutusmaksut riittävät korvauksiin suurella todennäköisyydellä.

Henkivakuutuksessa sopimukset ovat usein pitkäaikaisia. Toisin sanoen T on suuri. Yhtiö saa tavallisesti vakuutusmaksut ennen korvausten maksamista. Yhtiö pystyy siis hankkimaan sijoitustuotttoja saamallaan vakuutusmaksulla. Perusteltua on vaatia, että ainakin osa tuotoista käytetään vakuutetun hyväksi.

Oletetaan jälleen, että vakuutusmaksu maksetaan kertasuorituksena hetkellä 0. Ajatellaan aluksi, että on käytettävissä kiinteäkorkoinen pankkitili T vuoden talletukselle. Olkoon vuosikorko $i > 0$. Yhtiö tallettaa vakuutusmaksun heti tilille ja nostaa sen hetkellä T. Jos vakuutusmaksu on P', on nostettavissa oleva määrä

$$P'(1+i)^T.$$

Mikäli vakuutettuja on paljon, päästään nytkin kaavan (9.5) tilanteeseen. Vakuutusmaksuksi riittää määrä

$$P' = \frac{(1+\alpha)qM}{(1+i)^T}. \tag{9.6}$$

Jos T on suuri, on koron vaikutus vakuutusmaksuun merkittävä.

Oletetaan nyt, että riittävän pitkäaikaista riskitöntä sijoitustuottoa ei ole saatavilla. Voidaan kuitenkin olettaa, että operoimalla muuten markkinoilla P' voidaan sijoittaa tuottavasti odotusarvomielessä. Kuvatkoon S yhden euron sijoituksen antamaa rahamäärää hetkellä T.

Traditionaalisessa hinnoittelussa P' määrätään tyyppiä (9.6) olevalla kaavalla valitsemalla sopiva korkokanta i. Oletetaan, että

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S) > (1+i)^T, \\ \mathbb{P}\left(S < (1+i)^T\right) > 0. \end{cases}$$

Hetkellä T korvattava määrä on nytkin

$$X_N = M \sum_{j=1}^{N} 1(\tau_j > T).$$

Vakuutusmaksuista syntynyt määrä hetkellä T on

$$\frac{(1+\alpha)qM}{(1+i)^T} \cdot S \cdot N.$$

Todennäköisyys, että X_N ylittää tämän on

$$q_N \doteq \mathbb{P}\left(\frac{X_N}{N} > \frac{(1+\alpha)qM}{(1+i)^T} S\right).$$

Oletetaan, että S on riippumaton elinajoista. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} q_N &> \mathbb{P}\left(\frac{X_N}{N} > (1-\epsilon)qM, S < \frac{(1-\epsilon)(1+i)^T}{1+\alpha}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_N}{N} > (1-\epsilon)qM\right)\mathbb{P}\left(S < \frac{(1-\epsilon)(1+i)^T}{1+\alpha}\right) \\ &\to \mathbb{P}\left(S < \frac{(1-\epsilon)(1+i)^T}{1+\alpha}\right), \qquad \text{kun } N \to \infty. \end{aligned}$$

Tämä on positiivinen ainakin, jos ϵ ja α ovat pieniä. Ei siis päästä tilanteeseen, jossa vakuutusmaksut riittävät korvauksiin ykköstä lähellä olevalla todennäköisyydellä. Tämä on seurausta siitä, että sijoitustoimintaan liittyvä riski ei katoa vakuutettujen lukumäärän kasvaessa. Sijoitusriskistä ei siis päästä kokonaan eroon volyymia kasvattamalla.

9.2.2 Sijoitussidonnainen elämänvaravakuutus

Sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa korvausmäärä sidotaan finanssimarkkinoiden kehitykseen. Oletetaan, että korvattava määrä hetkellä T on erään sopimuksessa päätetyn osakkeen arvo hetkellä T. Olkoon osakkeen hinta hetkellä nolla $S(0) = M$. Kohdan 9.2.1 merkinnöin korvattava määrä hetkellä T on nyt

$$X_N = S\sum_{j=1}^{N} 1(\tau_j > T),$$

missä S on osakkeen arvo hetkellä T. Oletetaan, että S on riippumaton vakuutettujen elinajoista. Olkoon vakuutusmaksu per vakuutettu

$$P = (1+v)qS(0) = (1+\alpha)qM.$$

Jos $\alpha = 0$, on P 'reilu' hinta: yhtiö voi hankkia vakuutusmaksulla q osaketta. Hetkellä T hallussa olevan rahamäärän odotusarvo per vakuutettu on $q\mathbb{E}(S)$. Maksettavan määrän odotusarvo on sama,

$$\mathbb{E}(S1(\tau_j > T)) = q\mathbb{E}(S).$$

Olkoon nyt $\alpha > 0$. Sijoitetaan vakuutusmaksu kokonaisuudessaan mainittuun osakkeeseen. Hallussa oleva rahamäärä hetkellä T on tällöin

$$(1+\alpha)qNS.$$

Todennäköisyys, että X_N ylittää tämän on

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^N 1(\tau_j > T)}{N} > (1+\alpha)q\right) \to 0, \qquad \text{kun } N \to \infty.$$

Nähdään, että päästään tilanteeseen, jossa yhtiö selviytyy korvauksista vakuutusmaksujen avulla suurella todennäköisyydellä. Tämä voidaan ymmärtää siten, että oleellisesti ottaen sijoitusriski on siirtynyt vakuutetuille. Todettakoon myös, että ilmiö katoaa ellei yhtiö suojaudu sijoittamalla riittävästi osakkeeseen.

Tarkastellaan lopuksi lokaaliin keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuvaa suojautumista kohdan 5.2.4 hengessä. Olkoon finanssimarkkinoilla arvopaperit 1 ja 2. Arvopaperi 1 vastaa pankkitalletusta. Oletetaan, että vuosikorko on 0 kaikkina periodeina. Arvopaperi 2 on osake, jonka hetken k arvo on $S_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots, T$. Tarkastellaan yhtä vakuutettua, joka saa korvauksen X hetkellä T, mikäli on tällöin elossa. Ajatellaan, että X riippuu jollain lailla osakkeen arvokehityksestä. Vakuutetun jäljellä oleva elinaika τ oletetaan riippumattomaksi vektorista $(X, S_2(1), \ldots, S_2(T))$.

Oletetaan, että vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä 0. Merkitään

$$_kp_x = \mathbb{P}(\tau \geq x + k \,|\, \tau \geq x).$$

Seuraavassa tarkasteltava sigma-algebra $\mathcal{F}_k$ on

$$\mathcal{F}_k = \sigma\left(S_2(1), \ldots, S_2(k), \mathbb{1}(\tau \in (0,1]), \ldots, \mathbb{1}(\tau \in (k-1, k])\right).$$

Hetkellä $T-1$ yhtiö hankkii salkun $(\theta_1(T), \theta_2(T))^T$, joka minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left((V(T) - V(T-1) - \theta_2(T)(S_2(T) - S_2(T-1)))^2 \,|\, \mathcal{F}_{T-1}\right),$$

missä $V(k)$ on salkun arvo hetkellä k,

$$\begin{aligned} V(T) &= X\mathbb{1}(\tau > T), \\ V(T-1) &= \theta_1(T) + \theta_2(T)S_2(T-1). \end{aligned}$$

Ratkaisu on

$$\begin{aligned} V^*(T-1) &= \mathbb{E}(X\mathbb{1}(\tau > T) \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) - \theta_2^*(T)\mathbb{E}(S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1}), \\ \theta_2^*(T) &= \frac{\operatorname{Cov}(X\mathbb{1}(\tau > T), S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1})}{\operatorname{Var}(S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1})}, \\ \theta_1^*(T) &= V^*(T-1) - \theta_2^*(T)S_2(T-1). \end{aligned}$$

Yleisesti, jos satunnaisvektorit $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ ja $(\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ ovat riippumattomia, niin

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\xi\eta \,|\, \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)\right) \\ =\; &\mathbb{E}\left(\xi \,|\, \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right) \mathbb{E}\left(\eta \,|\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)\right) \quad \text{m.v.} \end{aligned}$$

Näin ollen esimerkiksi

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X\mathbb{1}(\tau > T) \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) \\ =\; &\mathbb{E}\left(X \,|\, \sigma(S_2(1), \ldots, S_2(T-1))\right) \\ &\cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}(\tau > T) \,|\, \mathbb{1}(\tau \in (0,1]), \ldots, \mathbb{1}(\tau \in (T-2, T-1])) \\ =\; &\mathbb{E}(X \,|\, \sigma(S_2(1), \ldots, S_2(T-1)))\, {}_1p_{x+T-1}\mathbb{1}(\tau > T-1). \end{aligned}$$

Optimaalinen osakkeiden määrä on

$$\theta_2^*(T) \quad = \quad \mathbb{1}(\tau > T-1)\,{}_1p_{x+T-1} \cdot \frac{\mathrm{Cov}(X, S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1})}{\mathrm{Var}(S_2(T) - S_2(T-1) \,|\, \mathcal{F}_{T-1})}.$$

Viimeinen osamäärä on optimaalinen osakkeiden määrä salkussa, jos suojattavana on pelkästään X. Sama rakenne on myös suureilla $V^*(T-1)$ ja $\theta_1^*(T)$. Hetkellä $T-2$ on optimaalista hankkia osakkeita määrä

$$\theta_2^*(T-1) = \mathbb{1}(\tau > T-2)\,{}_2p_{x+T-2} \cdot \eta_2^*(T-1),$$

missä $\eta_2^*(T-1)$ on optimaalinen osakkeiden määrä, kun suojattavana on pelkästään X. Edellä esitetty rakenne toteutuu kaikkina ajanhetkinä.

Esimerkki 9.1. Olkoon $X = S_2(T)$. Tällöin X on toistettavissa finanssimarkkinoilla. Ilmeisesti optimaalinen X:n suojaus on ottaa hetkellä $k-1$ salkku $(\eta_1^*(k), \eta_2^*(k))^T$,

$$\eta_1^*(k) = 0, \quad \eta_2^*(k) = 1.$$

Optimaalinen korvauksen suojaus $(\theta_1^*(k), \theta_2^*(k))^T$ on

$$\begin{aligned} \theta_1^*(k) &= 0, \\ \theta_2^*(k) &= \mathbb{1}(\tau > k-1)\,{}_{T-k+1}p_{x+k-1}. \end{aligned}$$

9.3 Tasapainohinnoittelusta jälleenvakuutusmarkkinoilla

Laajennetaan nyt vakuutusmarkkinoiden kuvausta olettamalla, että vakuutusyhtiöt voivat vapaasti ostaa ja myydä vakuutuksia toisiltaan. Tällöin puhutaan *jälleenvakuutusmarkkinoista.* Palovakuutusesimerkissä yhtiö voisi pitää omalla vastuullaan korkeintaan erään määrän M' ja ottaa ylimenevälle osalle vakuutuksen toiselta yhtiöltä. Oletetaan, että vakuutetun vakuutussopimuksen omavastuu M on nolla. Alkuperäisen vakuutussopimuksen mukainen yhtiön korvattava määrä on X. Jälleenvakuutuksen jälkeen tämä on

$$\min(X, M').$$

Jälleenvakuuttaja korvaa määrän

$$X - \min(X, M') = \max(X - M', 0).$$

Yhtiö maksaa jälleenvakuuttajalle vakuutusmaksun sopimuksesta. Tämä voisi määräytyä esimerkiksi odotusarvo- tai varianssiperiaatteen mukaisesti.

Markkinoilla esiintyy monenlaisia jälleenvakuutusjärjestelyjä. Olkoot markkinoilla yhtiöt $1, \ldots, K$. Yhtiön k alkujaan tekemät sopimukset velvoittavat korvausmäärään X_k, joka on ei-negatiivinen satunnaismuuttuja. Olkoon yhtiön *alkupääoma* U_k. Tähän sisällytetään tehtyjä sopimuksia vastaavat vakuutusmaksut. Olkoon edelleen u_k yhtiön utiliteettifunktio. Nämä oletetaan konkaaveiksi, derivoituviksi ja aidosti kasvaviksi.

Oletetaan, että yhtiö mittaa taloudelliseen tilaansa liittyvää hyötyä utiliteetin odotusarvolla. Hyöty ennen jälleenvakuutussopimusten tekemistä on siis

$$\mathbb{E}\left(u_k(U_k - X_k)\right).$$

Riskinvaihdossa yhtiöt pyrkivät jakamaan markkinoiden kokonaisvahinkomäärän

$$X = X_1 + \cdots + X_K$$

optimaalisella tavalla. Riskinvaihdon jälkeen yhtiön k vastattavaksi jää eräs kokonaisvahinkomäärä Y_k. Kutsutaan näiden muodostamaa yhdistelmää

$$(Y_1, \ldots, Y_K)$$

allokoinniksi. Allokointi on *sallittu*, jos se toteuttaa *clearing-ehdon*,

$$Y_1 + \cdots + Y_K = X_1 + \cdots + X_K. \tag{9.7}$$

Oletetaan, että yhtiöt toimivat utiliteetin odotusarvohypoteesin mukaisesti. Riskinvaihdon jälkeen yhtiön k tila on vähintään yhtä hyvä kuin alkuperäinen, jos

$$\mathbb{E}\left(u_k(U_k - Y_k)\right) \geq \mathbb{E}\left(u_k(U_k - X_k)\right). \tag{9.8}$$

Sallittua allokointia $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ kutsutaan *Pareto-optimaaliseksi* ellei ole sellaista sallittua allokointia $(Y_1, \ldots, Y_K)$, että

$$\mathbb{E}\left(u_k(U_k - Y_k)\right) \geq \mathbb{E}\left(u_k(U_k - \bar{X}_k)\right), \quad k = 1, \ldots, K,$$

ja erisuuruus on aito jollain $k \in \{1, \ldots, K\}$. Tämä vastaa luonteeltaan kohdan 6 samannimistä käsitettä. Clearing-ehto tarkoittaa nyt, että kaikki alkuperäiset vakuutussopimukset tulevat hoidettua.

Mikäli vaatimuksen (9.7) lisäksi muuttujille $Y_1, \ldots, Y_K$ ei aseteta muita rajoituksia, ollaan lähellä täydellisten markkinoiden tilannetta. Tällöin pätee seuraava Borchin lause.

Lause 9.1. *Sallittu allokointi $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen, jos ja vain jos on olemassa positiivinen satunnaismuuttuja f ja positiiviset vakiot $h_1, \ldots, h_K$ siten, että*

$$u_k'\left(U_k - \bar{X}_k\right) = h_k f \qquad m.v., \quad k = 1, \ldots, K.$$

Tulos on analoginen lauseen 6.1 kanssa. Todistus menee samoin, mutta keskustelu salkuista jää pois.

Tarkastellaan tasapainoteoriaa jälleenvakuutusmarkkinoilla. Olkoon π markkinoilla vallitseva hinnoittelukuvaus. Tulkitaan, että π liittää jokaiseen satunnaismuuttujaan $Y \in L^2$ reaaliluvun $\pi(Y)$, jota kutsutaan hinnaksi.

Seuraavassa oletetaan, että yhtiöt voivat tehdä mielivaltaisia sopimuksia keskenään, kunhan kyseeseen tulevat muuttujat ovat avaruudessa L^2. Oletetaan, että olisi

$$\pi(Y_1 + Y_2) > \pi(Y_1) + \pi(Y_2).$$

Tällöin olisi mahdollista ottaa vastattavaksi määrä $Y_1 + Y_2$ hintaan $\pi(Y_1 + Y_2)$ ja antaa muille markkinoiden osapuolille erikseen määrät Y_1 ja Y_2. Näistä maksettava vakuutusmaksu yhteensä on $\pi(Y_1) + \pi(Y_2)$. Tämä olisi pienempi kuin yhtiön itsensä maksama maksu eikä yhtiölle jäisi korvauksia vastattavakseen. Syntyisi mahdollisuus tehdä voittoa riskittömästi. Tällainen hinnoittelu vaikuttaa 'epäsopivalta', vaikkakaan laajamittaista rahantekomahdollisuutta ei ehkä synny. Rationaaliselta tuntuu tällä perusteella vaatia, että π on lineaarinen. Kaikki käytännössä esiintyvät hinnoittelujärjestelmät eivät kuitenkaan ole tällaisia. Esimerkiksi kohdan alussa esitetty varianssiperiaate ei ole lineaarinen. Luonnollista on vaatia lisäksi, että π on positiivinen. Toisin sanoen, jos $Y \geq 0$ m.v. niin $\pi(Y) \geq 0$.

Yhtiö k pyrkii ratkaisemaan seuraavan optimointitehtävän:

$$\max_{Y_k \in L^2} \mathbb{E}\left(u_k(U_k - Y_k + \pi(Y_k) - \pi(X_k))\right).$$

Siis yhtiö luopuu alkuperäisestä vastuullaan olevasta kokonaisvahinkomäärästä X_k ja saa tilalle kokonaisvahinkomäärän Y_k. Jälkimmäinen valitaan optimaalisesti.

Lause 9.2. *Olkoon $\pi : L^2 \to \mathbb{R}$ lineaarinen ja positiivinen. Silloin on olemassa sellainen $\phi \in L^2$, että $\phi \geq 0$ m.v. ja*

$$\pi(Y) = \mathbb{E}(\phi Y), \quad \forall Y \in L^2. \tag{9.9}$$

Todistus. (pääpiirteissään). Tulos seuraa Rieszin esityslauseesta, kunhan ensin näytetään, että π on jatkuva kuvauksena $L^2 \to \mathbb{R}$, kun normina on

$$\|f\|_2 = \mathbb{E}(|f|^2)^{1/2}.$$

Jatkuvuus seuraa π:n positiivisuudesta sekä yleisestä kompleksiavarvoisia lineaarikuvauksia koskevasta tuloksesta. Perusteluja on esitetty lähteissä Royden (1963), ja Rudin (1974), lause 11.31. □

Jatkossa oletetaan, että lauseen 9.2 ehdot on täytetty. Kutsutaan muuttujaa ϕ *hinnoittelijaksi.* Mahdollisten Y-muuttujien joukko on tässä laaja, mikä takaa hinnoittelijan yksikäsitteisyyden, kun π on annettu.

Systeemiä $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ kutsutaan *tasapainotilaksi*, jos $\bar{\phi}$ on hinnoittelija, allokointi $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on sallittu ja

$$\begin{aligned} & \max_{Y_k \in L^2} \mathbb{E}\{u_k(U_k - Y_k + \mathbb{E}(\bar{\phi}(Y_k - X_k)))\} \\ = \; & \mathbb{E}\{u_k(U_k - \bar{X}_k + \mathbb{E}(\bar{\phi}(\bar{X}_k - X_k)))\}, \end{aligned}$$

kaikilla $k = 1, \ldots, K$. Tällöin $\bar{\phi}$ on *tasapainohinnoittelija* ja $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ *tasapainoallokointi.*

Lauseen 7.4 analogia on seuraava.

Lause 9.3. *Olkoon $\bar{\phi}$ hinnoittelija, $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ sallittu allokointi ja*

$$\bar{Z}_k = U_k - \bar{X}_k + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\bar{X}_k - X_k\right)\right), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Silloin $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on tasapainotila, jos ja vain jos kaikilla $k = 1, \ldots, K$,

$$u_k'\left(\bar{Z}_k\right) = h_k \bar{\phi} \qquad m.v., \tag{9.10}$$

missä

$$h_k = \mathbb{E}\left(u_k'\left(\bar{Z}_k\right)\right). \tag{9.11}$$

Huomautus 9.1. Lauseen nojalla tasapainohinnoittelijalle pätee aina

$$\mathbb{E}(\bar{\phi}) = 1. \tag{9.12}$$

Todistus. Olkoon $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ tasapainotila, A mitallinen joukko, $\epsilon \in \mathbb{R}$ ja

$$Y_1 = Y_1(\epsilon) = \bar{X}_1 + \epsilon \mathbb{1}(A).$$

Merkitään

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \mathbb{E}\left\{u_1\left(U_1 - Y_1 + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(Y_1 - X_1\right)\right)\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{u_1\left(U_1 - \bar{X}_1 - \epsilon\mathbb{1}(A) + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\bar{X}_1 - X_1 + \epsilon\mathbb{1}(A)\right)\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Tällöin $g'(0) = 0$. Nyt

$$g'(\epsilon) = \mathbb{E}\left\{\left(-\mathbb{1}(A) + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\mathbb{1}(A)\right)\right) u_1'\left(U_1 - \bar{X}_1 - \epsilon\mathbb{1}(A) - \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\bar{X}_1 - X_1 + \epsilon\mathbb{1}(A)\right)\right)\right)\right\}.$$

Siis

$$\mathbb{E}\left\{\left(-\mathbb{1}(A) + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\mathbb{1}(A)\right)\right) u_1'\left(\bar{Z}_1\right)\right\} = 0.$$

Nähdään, että

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left(u_1'(\bar{Z}_1)\right)\bar{\phi}\mathbb{1}(A)\right\} = \mathbb{E}\left\{u_1'\left(\bar{Z}_1\right)\mathbb{1}(A)\right\}.$$

Erityisesti tämä pätee, kun

$$A \;=\; \left\{\omega \,|\, \mathbb{E}\left(u_1'\left(\bar{Z}_1\right)\right)\bar{\phi} < u_1'\left(\bar{Z}_1\right)\right\}.$$

Nähdään, että $\mathbb{P}(A) = 0$. Sama pätee, jos erisuuruus käännetään. Siis (9.10) toteutuu, kun $k = 1$. Symmetrian nojalla näin on kaikilla $k = 1, \ldots, K$.

Oletetaan, että (9.10) toteutuu. Olkoon Y_k mielivaltainen toimijan k osuus. Tällöin

$$\begin{aligned}
& u_k\left(U_k - Y_k + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(Y_k - X_k\right)\right)\right) \\
= \;& u_k\left(\bar{Z}_k + \bar{X}_k - Y_k + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(Y_k - \bar{X}_k\right)\right)\right) \\
\le \;& u_k\left(\bar{Z}_k\right) + u_k'\left(\bar{Z}_k\right)(\bar{X}_k - Y_k + \mathbb{E}(\bar{\phi}(Y_k - \bar{X}_k))) \\
= \;& u_k\left(\bar{Z}_k\right) + h_k\bar{\phi}\cdot(\bar{X}_k - Y_k + \mathbb{E}(\bar{\phi}(Y_k - \bar{X}_k))).
\end{aligned}$$

Nyt $\mathbb{E}(\bar{\phi}) = 1$, joten

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left\{u_k\left(U_k - Y_k + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(Y_k - X_k\right)\right)\right)\right\} \\
\le \;& \mathbb{E}\left\{u_k\left(\bar{Z}_k\right)\right\} + \mathbb{E}\left\{h_k\bar{\phi}\left(\bar{X}_k - Y_k\right)\right\} + \mathbb{E}\left\{h_k\bar{\phi}\right\}\mathbb{E}\left\{\bar{\phi}\left(Y_k - \bar{X}_k\right)\right\} \\
= \;& \mathbb{E}\left\{u_k\left(\bar{Z}_k\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Nähdään, että $\bar{X}_k$ maksimoi toimijan k hyödyn. □

Seuraus 9.4. *Olkoon $\bar{\phi}$ hinnoittelija ja $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ sallittu allokointi.*

Jos

$$\mathbb{E}(\bar{\phi}\bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi}X_k), \quad k = 1, \ldots, K, \tag{9.13}$$

ja

$$u_k'(U_k - \bar{X}_k) = \mathbb{E}(u_k'(U_k - \bar{X}_k))\bar{\phi} \;\textit{m.v.}, \quad k = 1, \ldots, K, \tag{9.14}$$

niin $(\bar{\phi}, \bar{X}_1 + c_1, \ldots, \bar{X}_K + c_K)$ on tasapainotila, kunhan vakiot $c_1, \ldots, c_K$ ovat sellaisia, että

$$c_1 + \cdots + c_K = 0. \tag{9.15}$$

Kääntäen, jos $(\bar{\phi}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_K)$ on tasapainotila, niin se on muotoa

$$(\bar{\phi}, \bar{X}_1 + c_1, \ldots, \bar{X}_K + c_K),$$

missä $\bar{\phi}$, $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K$, $c_1, \ldots, c_K$ toteuttavat ehdot (9.13), (9.14) *ja* (9.15).

Todistus. Jos ehdot (9.13) ja (9.14) toteutuvat, niin samoin toteutuu (9.10). Lauseen 9.3 nojalla $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on tasapainotila. Lisäämällä lauseen mukaiset vakiot $c_1, \ldots, c_K$ yhtälö (9.10) toteutuu edelleen. Nimittäin $\mathbb{E}\left(\bar{\phi}\right) = 1$ ja siis

$$\begin{aligned}\bar{Z}_k &= U_k - \left(\bar{X}_k + c_k\right) + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\left(\bar{X}_k + c_k\right) - X_k\right)\right) \\ &= U_k - \bar{X}_k + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\bar{X}_k - X_k\right)\right).\end{aligned}$$

Clearing-ehto toteutuu allokoinnille $(\bar{X}_1 + c_1, \ldots, \bar{X}_K + c_K)$ yhtälön (9.15) nojalla. Siis $(\bar{\phi}, \bar{X}_1 + c_1, \ldots, \bar{X}_K + c_K)$ on tasapainotila.

Olkoon nyt $(\bar{\phi}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_K)$ tasapainotila. Lauseen 9.3 nojalla (9.10) pätee, kun $\bar{X}_k$ korvataan $\bar{Y}_k$:lla. Olkoon

$$\bar{X}_k = \bar{Y}_k - \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\bar{Y}_k - X_k\right)\right), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Allokointi $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on sallittu ja

$$u_k'\left(U_k - \bar{X}_k\right) = \mathbb{E}\left(u_k'\left(U_k - \bar{X}_k\right)\right)\bar{\phi} \quad \text{m.v.}$$

Lisäksi $\mathbb{E}(\bar{\phi}\bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi}X_k)$. Nähdään, että

$$\bar{Y}_k = \bar{X}_k + c_k, \qquad c_k = \mathbb{E}\left(\bar{\phi}\left(\bar{Y}_k - X_k\right)\right),$$

missä $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ toteuttaa lauseen vaatimukset (9.13) ja (9.14). Lisäksi $c_1 + \cdots + c_K = 0$. □

Esimerkki 9.2. Olkoon

$$u_k(z) = -\frac{1}{2}z^2 + b_k z, \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

missä $b_k > U_k$, $k = 1, \ldots, K$. Utiliteettifunktiot eivät ole kaikkialla kasvavia, mutta tarvittavat oikaisut voidaan tehdä kuten esimerkissä 6.1.

Pyritään määräämään kaavojen (9.13) ja (9.14) mukaiset $\bar{\phi}$ ja $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K$. On siis oltava

$$-U_k + \bar{X}_k + b_k = h_k\bar{\phi}, \qquad \mathbb{E}(\bar{\phi}) = 1. \tag{9.16}$$

Merkitään

$$\begin{aligned}U &= U_1 + \cdots + U_K, \\ X &= X_1 + \cdots + X_K, \\ b &= b_1 + \cdots + b_K.\end{aligned}$$

Laskemalla yhtälöt (9.16) yhteen saadaan clearing-ehdon nojalla

$$-U + X + b = \bar{\phi}\sum_{k=1}^{K} h_k.$$

Koska $\mathbb{E}(\bar{\phi}) = 1$, on välttämättä

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi} = \frac{X+b-U}{h}, \\ h = \mathbb{E}(X) + b - U > 0. \end{array} \right. \tag{9.17}$$

Tämä on ainut mahdollinen $\bar{\phi}$. Kertomalla (9.16) tällä hinnoittelijaehdokkaalla ja ottamalla odotusarvot sekä käyttämällä yhtälöä (9.13) saadaan

$$-U_k + \mathbb{E}\left(\bar{\phi}X_k\right) + b_k = h_k\mathbb{E}\left(\bar{\phi}^2\right).$$

Siis ainut mahdollinen h_k on

$$h_k = \frac{\mathbb{E}\left(\bar{\phi}X_k\right) + b_k - U_k}{\mathbb{E}\left(\bar{\phi}^2\right)} > 0.$$

Tästä $\bar{X}_k$ määräytyy yksikäsitteisesti eli ainut mahdollinen $\bar{X}_k$ on

$$\bar{X}_k = \frac{\mathbb{E}\left(\bar{\phi}X_k\right) + b_k - U_k}{\mathbb{E}\left(\bar{\phi}^2\right)}\bar{\phi} + U_k - b_k,$$

missä $\bar{\phi}$ on kaavan (9.17) mukainen. On helppo nähdä, että clearing-ehto ja vaatimukset $\mathbb{E}(\bar{\phi}\bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi}X_k)$ todella toteutuvat näillä valinnoilla. Myös

$$h_k = \mathbb{E}\left(u_k'\left(U_k - \bar{X}_k\right)\right), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Oletetaan nyt lisäksi, että alkuperäiset vahinkomäärät $X_1, \ldots, X_K$ ovat riippumattomia. Tutkitaan, miten tasapainohinnoittelija hinnoittelee nämä riskit. Nyt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\bar{\phi}X_k\right) &= \frac{b-U}{h}\mathbb{E}(X_k) + h^{-1}\sum_{m=1}^{K}\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_m) + h^{-1}\mathrm{Var}(X_k) \\ &= \mathbb{E}(X_k) + h^{-1}\mathrm{Var}(X_k). \end{aligned}$$

Päädyttiin kaavan (9.2) mukaiseen varianssiperiaatteeseen.

Lisälähteitä kohtaan 9: Aase (2002), Bühlmann (1984) ja Möller (2000).

Viitteet

Aase, K. (2002). Perspectives of risk sharing. *Scand. Actuarial J.* **5**, 73–128.

Borch, K. (1960). The safety loading of reinsurance premiums. *Skand. Aktuarietidskrift* **43**, 163–184.

Bühlmann, H. (1984). The general economic premium principle. *Astin Bulletin* **14**, 13–21.

Daykin, C. D., T. Pentikäinen, and M. Pesonen (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* London: Chapman & Hall.

Föllmer, H. and A. Schied (2011). *Stochastic Finance.* Berlin: Walter de Gruyter.

Huang, C. and R. Litzenberger (1988). *Foundations of Financial Economics.* Amsterdam: Elsevier Science Publishing Co.

LeRoy, S. and J. Werner (2001). *Principles of Financial Economics.* Cambridge University Press.

Möller, T. (2000). *Quadratic Hedging approaches and Indifference Pricing in Insurance.* Ph.D. dissertation, University of Copenhagen.

Norberg, R. (1990). Payment measures, interest and discounting, an axiomatic approach with applications to insurance. *Scand. Actuarial J.*, 14–33.

Panjer, H. (1998). *Financial Economics.* Schaumburg, IL: The Actuarial Foundation.

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis.* Princeton Univ. Press.

Royden, H. (1963). *Real Analysis.* New York: The MacMillan Company.

Rudin, W. (1974). *Functional Analysis (TMH edition).* New Delhi: McGraw-Hill Publishing Company Ltd.