Sijoitustoiminnan matematiikka 8.8.2013

1. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on N arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ ja arvopaperit $2, \ldots, N$ ovat riskillisiä. Arvopaperin n hetken 0 hinta on $S_n(0), n = 1, \ldots, N$.

Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat, kun vuosikorko on i ja $S_n(0) = p_n, n = 2, \ldots, N$. Samoin oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat, kun vuosikorko on i ja $S_n(0) = q_n, n = 2, \ldots, N$. Olkoon $\alpha \in (0, 1)$. Osoita, että markkinat ovat arbitraasivapaat, kun vuosikorko on i ja $S_n(0) = \alpha p_n + (1 - \alpha) q_n, n = 2, \ldots, N$.

2. Kahden periodin finanssimarkkinoilla on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 on nollakuponkibondi, jonka vuosikorko on $i = 0$ molempina periodeina. Arvopaperi 2 on osake, jonka hinta hetkellä k on $S_2(k)$, $k = 0, 1, 2$. Oletetaan, että

$$S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = 1 + \xi_1 \quad \text{ja} \quad S_2(2) = (1 + \xi_1)(1 + \xi_2),$$

missä ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $\mathbb{P}(\xi_1 = -1/2) = 1/4, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 1/2) = 3/4$.

Toimijan varallisuus on V euroa hetkellä 0. Tämä sijoitetaan markkinoille 2 vuodeksi. Määrää optimaalinen toteutuneisiin arvopapereiden hintoihin perustuva omavarainen strategia, kun tavoitteena on maksimoida hetken 2 utiliteetin odotusarvo ja arvopapereiden lyhyeksimyynti on kielletty. Toimijan utiliteettifunktio u määräytyy ehdosta $u(z) = \mu^{-1}(1 - e^{-\mu z}), z \in \mathbb{R}$, missä $\mu > 0$ on vakio ja $\mu V > 2 \log 3$.

3. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0.03$ (arvopaperi 1) ja 3 riskillistä arvopaperia (arvopaperit 2, 3 ja 4). Arvopaperin n hetken 0 hinta on $S_n(0)$ ja odotustuotto r_n, $n = 1, \ldots, 4$. Riskillisten arvopapereiden odotustuotot eivät ole kaikki samoja ja tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä. Toimija on muodostanut CAP-mallin mukaisen optimaalisen salkun, jossa bondiin on sijoitettu $6.4 \cdot 10^5$ euroa ja arvopaperia n on θ_n kappaletta, $n = 2, 3, 4$. Salkun tuottoasteen hajonta 0.6. Muut numeroarvot ovat seuraavan taulukon mukaiset.

n	$S_n(0)$	r_n	θ_n
2	100	0.1	1 920
3	200	0.1	2 400
4	400	0.2	720.

a) Määrää salkun odotustuotto.

b) Toimija arvioi riskinkantokykynsä parantuneen ja järjestelee salkkunsa uudelleen optimaalisesti CAP-mallin mukaisesti siten, että salkun tuottoasteen hajonnaksi tulee 0.8. Määrää järjestelyssä syntyvä salkku ja sen odotustuotto.

4. Jälleenvakuutusmarkkinoilla on K toimijaa. Toimijan k alkupääoma on U_k ja vakuutettava kokonaisvahinkomäärä X_k. Toimijan k utiliteettifunktio u_k on aidosti konkaavi, kaikkialla derivoituva ja aidosti kasvava, $k = 1, \ldots, K$. Lisäksi

$$u_k(z) = -z^2/2 + b_k z, \quad \forall z \leq b_k - 1,$$

missä b_k on positiivinen vakio, $k = 1, \ldots, K$. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi tasapainotila, kunhan vakiot $b_1, \ldots, b_K$ ovat riittävän suuria.

Sijoitustoiminnan matematiikka, 8.8.-13

1. Olkoot ϕ_1, ϕ_2 hinnoittelijoita,

$$p_n = \mathbb{E}(\phi_1 S_n(1)),$$
$$q_n = \mathbb{E}(\phi_2 S_n(1)), \quad n = 1, \dots, N.$$

Tällöin $\phi = \alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_2$ on positiivinen ja

$$\mathbb{E}(\phi S_n(1)) = \alpha p_n + (1-\alpha) q_n.$$

Siis $S_n(0) = \alpha p_n + (1-\alpha) q_n$ on AV-vapaa hinta.

2. Olkoon w_k osakkeseen sijoitettava suhteellinen määrä hetkellä $k-1$, $k = 1, 2$. Varallisuus hetkellä 2 on

$$V(1+w_1 \xi_1)(1+w_2 \xi_2), \quad w_1, w_2 \in [0,1].$$

Lisäksi w_1 on deterministinen ja w_2 riippuu vain hinnasta $S_2(1)$ (tai ξ_1:stä). Utiliteetin odotusarvo on

$$f(w_1, w_2) = \mu^{-1} \mathbb{E}\left(1 - e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)(1+w_2\xi_2)}\right)$$

Kun w_1 ja ξ_1 on annettu, määräytyy optimaalinen w_2 vaatimuksesta

$$\mathbb{E}(f(w_1, w_2) \mid \xi_1) = \max!$$

Yhtäpitävää on minimoida

$$g(w_1, w_2) = \mathbb{E}\left(e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)(1+w_2\xi_2)} \mid \xi_1\right)$$
$$= \frac{1}{4} e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)(1-\frac{w_2}{2})} + \frac{3}{4} e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)(1+\frac{w_2}{2})}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2} g(w_1, w_2) = \frac{1}{4} e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)} \left[\frac{\mu V(1+w_1\xi_1)}{2} e^{\mu V(1+w_1\xi_1)\cdot\frac{w_2}{2}} - \frac{3\mu V(1+w_1\xi_1)}{2} e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)\cdot\frac{w_2}{2}} \right]$$
$$= 0.$$

Koska $w_1 \in [0,1]$, $\min w_1 \xi_1 \neq -1$. Tällöin $\frac{\partial}{\partial w_2} g = 0$

$$\Leftrightarrow e^{\mu V(1+w_1\xi_1)\cdot \frac{w_2}{2}} = 3 e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)\cdot \frac{w_2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \mu V(1+w_1\xi_1)\cdot \frac{w_2}{2} = \log 3 - \mu V(1+w_1\xi_1)\cdot \frac{w_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow w_2 = \frac{\log 3}{\mu V(1+w_1\xi_1)}.$$ Tämä antaa globaalin minimin.

Tällä valinnalla $w_2 = w_2(\xi_1, w_1)$ on

$$g(w_1, w_2) = \frac{1}{4} e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)} \left[e^{\frac{\log 3}{2}} + 3 e^{-\frac{\log 3}{2}} \right]$$

$$= a e^{-\mu V(1+w_1\xi_1)}, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Optimaalinen w_1 saadaan minimoimalla tämän odotusarvo,

$$h(w_1) = \frac{a}{4} e^{-\mu V(1-\frac{w_1}{2})} + \frac{3a}{4} e^{-\mu V(1+\frac{w_1}{2})}$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_1} = \frac{a}{8} e^{-\mu V}\left(\mu V e^{+\mu V\frac{w_1}{2}} - 3\mu V e^{-\mu V\frac{w_1}{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu V\frac{w_1}{2}} = 3 e^{-\mu V\frac{w_1}{2}} \Leftrightarrow w_1 = \frac{\log 3}{\mu V}.$$

Optimaaliset valinnat ovat siis

$$w_1 = \frac{\log 3}{\mu V}, \quad w_2 = \frac{\log 3}{\mu V(1+w_1\xi_1)} = \frac{\log 3}{\mu V + \xi_1 \log 3}$$

Tällöin $w_1, w_2 \in [0,1]$, koska $\mu V > 2\log 3$. Siis lyhyeksimyyntiä ei tapahdu.

3. a) Salkun hetken 0 arvo on

$$W_0 = 6.4 \cdot 10^5 + 100 \cdot 1920 + 200 \cdot 2400 + 400 \cdot 720 = 16 \cdot 10^5$$

Odotusarvo hetkellä 1 on

$$W_1 = 1.03 \cdot 6.4 \cdot 10^5 + 1.1 \cdot 100 \cdot 1920 + 1.1 \cdot 200 \cdot 2400 + 1.2 \cdot 400 \cdot 720 = 1.744 \cdot 10^5.$$

Odotustuottoaste on $\frac{W_1}{W_0} - 1 = 0.09.$

b) Riskillisten arvopapereiden hetken 0 arvot salkussa ovat

n	arvo	osuus
2	192 000	0,2
3	480 000	0,5
4	288 000	0,3
Σ	960 000.	

Markkinasalkku on siis $(0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$.

Riskittömän arvopaperin osuus on $w = 0{,}4$. Salkun tuottoasteen hajonta on

$$0{,}6 = (1-w)\,\sigma^*$$ (σ^* = markkinasalkun tuottoasteen hajonta).

Siis $\sigma^* = 1$.

Uuden salkun hajonnan on oltava 0.8, jolloin riskittömän arvopaperin osuus on 0.2. Bondiin sijoitetaan siis

$$0{,}2 \cdot W_0 = 3{,}2 \cdot 10^5 \text{ euroa.}$$

Arvopaperiin 2 sijoitetaan $0{,}8 \cdot 0{,}2\, W_0 = 2{,}56 \cdot 10^5$

3 $\quad 0{,}8 \cdot 0{,}5\, W_0 = 6{,}4 \cdot 10^5$

4 $\quad 0{,}8 \cdot 0{,}3\, W_0 = 3{,}84 \cdot 10^5$,

kappaleina 2 560, 3 260 ja 960.

Odotustuottoaste on

$$0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}8\,(0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2) = 0{,}11.$$

4. Luennot, esimerkki 9.2.