Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 11, 22.4.2013

1. Kahden periodin finanssimarkkinoilla on pankkitili, jonka vuosikorko on 0 kaikilla periodeilla (arvopaperi 1), osake (arvopaperi 2) ja osakkeeseen kytketty myyntioptio (arvopaperi 3). Osakken arvo hetkellä k on $S_2(k)$ ja option $S_3(k)$, $k = 0, 1, 2$. Optio haltijalla on oikeus myydä yksi osake hintaan $S_2(0)$ hetkellä 2. Markkinat ovat arbitraasivapaat.

Sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa yhtiö suorittaa hetkellä 2 vakuutetulle määrän $\max(S_2(2), S_2(0))$, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Olkoon τ vakuutetun jäljellä oleva elinaika ja

$$_kp_y = \mathbb{P}(\tau \geq y + k \,|\, \tau \geq y), \quad y \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oletetaan, että τ on riippumaton finanssimarkkinoiden arvopapereista. Määrää lokaaliin keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuva optimaalinen sijoitusstrategia, kun vakuutettu on x-ikäinen hetkellä 0.

2. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinat kuten lauseessa 9.1 ja $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ sallittu allokointi. Osoita, että jos on olemassa positiiviset vakiot $h_1, \ldots, h_K$ ja positiivinen satunnaismuuttuja f siten, että

$$u_k'(U_k - \bar{X}_k) = h_k f$$

melkein varmasti kaikilla $k = 1, \ldots, K$, niin $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

3. Olkoon $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ jälleenvakuutusmarkkinoiden tasapainotila ja

$$\mathbb{E}(\bar{\phi}\bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi}X_k), \quad k = 1, \ldots, K,$$

missä $X_1, \ldots, X_K$ ovat alkuperäiset vakuutetut kokonaisvahinkomäärät. Osoita, että $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

4. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, K,$$

missä $\mu_1, \ldots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$. Alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, \ldots, X_K$ ovat rajoitettuja satunnaismuuttujia. Oletetaan, että markkinat ovat tasapainotilassa. Määrää markkinoiden hinnoittelija.

5. (jatkoa) Esscherin tariffiperiaatteessa kokonaisvahinkomäärää Y vastaava vakuutusmaksu $\pi(Y)$ on

$$\pi(Y) = \mathbb{E}\left(Ye^{aY - c_Y(a)}\right),$$

missä a on positiivinen vakio ja c_Y kumulantit generoiva funktio,

$$c_Y(t) = \log \mathbb{E}(e^{tY}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että jos alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, \ldots, X_K$ ovat riippumattomia, niin niiden tasapainohinnat ovat Esscherin tariffiperiaatteen mukaisia ja $a = \mu$.