Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 10, 15.4.2013

Kaikissa tehtävissä arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$. Arvopaperit $2, \dots, N$ ovat riskillisiä. Arvopaperin n hinta hetkellä nolla on $S_n(0)$ ja arvo hetkellä yksi $S_n(1)$. Oletetaan, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä ja että odotustuotot eivät kaikki ole samoja.

1. Toimijalla on hetkellä nolla käytettävissään pääoma $U_0 > 0$. Tämä sijoitetaan hetkellä 0 vuodeksi markkinoille. Olkoon CAP-mallin mukainen odotustuottoa r vastaava optimaalinen arvopaperiin n sijoitettava määrä $v_n^*(r)\, U_0$, $n = 1, \dots, N$, $r > i$.

Hetkellä 1 salkku realisoidaan ja samassa yhteydessä luovutetaan aiempien sopimusten nojalla k_n kappaletta arvopaperia n sopijaosapuolille, $n = 1, \dots, N$. Operaatioiden jälkeen toimijalla on hallussaan eräs varallisuus U_1 hetkellä 1. Toimija ottaa salkun valinnassa lähtökohdaksi asetelman, jossa varallisuus U_0 tuottaa varallisuuden U_1 tarkasteluvuotena. Salkku valitaan siten, että odotustuotto on r ja tuottoasteen varianssi on minimaalinen. Merkitään

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} k_n \frac{S_n(0)}{U_0}.$$

Muotoile salkun valinta matemaattiseksi optimointitehtäväksi.

2. (jatkoa) Oletetaan, että $\rho \in (0,1)$ ja että $r > (1-\rho)i - \rho$. Osoita, että optimaalinen arvopaperiin n sijoitettava määrä on $((1-\rho)z_n^* + y_n)\, U_0$, $n = 1, \dots, N$, missä

$$z_n^* = v_n^* \left(\frac{r+\rho}{1-\rho} \right) \qquad \text{ja} \qquad y_n = k_n S_n(0)/U_0$$

3. (jatkoa tehtävään 1) Oletetaan, että $\rho \in (0,1)$ ja että $r = (1-\rho)i - \rho$. Osoita, että minimaalinen tuottoasteen varianssi on nolla.

4. Olkoon riskitön korko $i = 0.03$ ja riskillisiä arvopapereita kolme kappaletta. Arvopaperin n tulevaa vuotta koskeva tuottoasteen odotusarvo on r_n ja osuus markkinasalkussa on w_n^*, $n = 2, 3, 4$. Numeroarvot ovat seuraavan taulukon mukaiset.

n	$S_n(0)$	r_n	w_n^*
2	100	0.1	0.2
3	200	0.1	0.5
4	400	0.2	0.3.

Hetkellä 0 toimija on sijoittanut riskittömään arvopaperiin $8 \cdot 10^5$ euroa. Lisäksi arvopaperisalkussa on 2 000 kappaletta arvopaperia 2, 1 000 kappaletta arvopaperia 3 ja 1 000 kappaletta arvopaperia 4.

a) Toteuttaako toimijan salkku CAP-mallin optimaalisuuskriteerit.

b) Suorita sijoitusten uudelleenallokointi siten, että odotustuotto säilyy ja varianssi minimoituu.

c) Olkoon markkinasalkun tuottoasteen hajonta 1. Määrää kohdan b) salkun tuottoasteen hajonta.

5. Olkoon arvopaperin n lukumäärä markkinoilla L_n, tulevan vuoden tuottoaste R_n, $n = 1, \ldots, N$, sekä riskillisten arvopapereiden kokonaistutottoaste R^*.

Olkoon markkinoiden hinnoittelija ϕ muotoa $\phi = g(A(1))$, missä g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio. Oletetaan lisäksi, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden yhteisjakauma on multinormaalinen (jolloin tunnetusti parilla (R_n, R^*) on kaksiulotteinen normaalijakauma kaikilla n). Osoita, että

$$\mathbb{E}(R_n) = i + \frac{\mathrm{Cov}\,(R_n, R^*)}{\mathrm{Var}\,(R^*)}(\mathbb{E}(R^*) - i), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Tehtävässä oletetaan tunnetuksi ns. Steinin lemma: jos (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa ja g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio, niin

$$\mathrm{Cov}\,(X, g(Y)) = \mathrm{Cov}\,(X, Y)\mathbb{E}(g'(Y)).$$