

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 7, 18.3.2013

1. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot u_1, \dots, u_K . Olkoot $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ positiivisia vakioita ja β_1, \dots, β_K mielivaltaisia reaalilukuja. Määritellään utiliteettifunktiot v_k ehdoista

$$v_k(z) = \alpha_k u_k(z) + \beta_k, \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Oletetaan, että $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi, kun utiliteettifunktiot ovat u_1, \dots, u_K . Osoita, että sama pätee, kun utiliteettifunktiot ovat v_1, \dots, v_K .

2. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot u_1, \dots, u_K kaikkialla aidosti kasvavia ja derivaatta u'_1 kaikkialla aidosti vähenevä. Oletetaan, että kaikilla $k = 2, \dots, K$ ja $z \in \mathbb{R}$,

$$u_k(z) = c_k u_1(a_k z + b_k),$$

missä $a_k > 0, c_k > 0$ ja $b_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Olkoon $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1$ ja

$$a = \sum_{k=1}^K \frac{1}{a_k} \quad \text{ja} \quad b = \sum_{k=1}^K \frac{b_k}{a_k}.$$

Oletetaan lisäksi, että $c_k = 1/a_k, \forall k$. Tarkastellaan vaatimuksia

$$u'_k(S(1)\bar{\theta}^k) = hf, \quad \forall k,$$

missä $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ on sallittu allokointi, h positiivinen vakio ja f positiivinen satunnaisuuttuja. Osoita, että f on välttämättä muotoa

$$f = h^{-1} u'_1 \left(\frac{A(1) + b}{a} \right),$$

missä $A(1)$ on markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1.

3. (jatkoa) Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.

4. (jatkoa) Luovutaan oletuksista $c_k = 1/a_k$. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.

5. (jatkoa) Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot muotoa

$$u_k(z) = \mu_k^{-1} (1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K,$$

missä μ_1, \dots, μ_K ovat positiivisia vakioita. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.