

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 1, 28.1.2013

1. Seuraavassa taulukossa vuosikorko i on ilmoitettu seuraavan korkoutusperiaatteen mukaisesti. Talletus C kasvaa aikavälillä $[0, \Delta)$ määräksi $(1+i)^{\lfloor \Delta \rfloor} (1+i(\Delta - \lfloor \Delta \rfloor))C$, missä $\lfloor \Delta \rfloor$ tarkoittaa Δ :n kokonaisosaa. Määrittää luottojen sopimuksen mukaiset aikaväliä $[0, \Delta)$ koskevat vuosikorot (jotka siis antavat talletuksille samat absoluuttiset tuotot).

Δ	1/2	3/2
Vuosikorko	0.04	0.04.

2. Olkoon vuoden 1 vuosikorko $i_1 > 0$ vakio ja vuoden 2 vuosikorko I_2 stokastinen. Olkoon $\mathbb{P}(I_2 > 0) = 1$. Korkorakenne hetkellä nolla on

Eräpäivä	1	2
Vuosikorko	i_1	i_1 .

Hetkellä nolla on vapaasti ostettavissa ja myytävissä yhden ja kahden ja hetkellä yksi yhden vuoden nollakuponkibondeja. Osoita, että markkinoilla on välillä $[0, 1]$ arbitraasimahdollisuus jos ja vain jos jompi kumpi seuraavista ehdoista (i) ja (ii) on täytetty:

$$(i) \mathbb{P}(I_2 \leq i_1) = 1 \text{ ja } \mathbb{P}(I_2 < i_1) > 0 \quad (ii) \mathbb{P}(I_2 \geq i_1) = 1 \text{ ja } \mathbb{P}(I_2 > i_1) > 0.$$

3. Olkoon korkomalli luottojen kohdan 2 mukainen ja markkinat arbitraasivapaat. Oletetaan, että $\Delta = 1$. Tarkastellaan instrumenttia, jonka omistaja saa hetkinä $1, \dots, T$ aidosti positiiviset suoritukset $B(1), \dots, B(T)$. Tulkitaan sopimus investoinniksi, jossa syntyy ajanhetkiä $0, 1, \dots, T$ koskeva kassavirta $B(0) = -V(0), B(1), \dots, B(T)$, missä $V(0)$ on kassavirran hinta hetkellä 0. Määritellään investoinnin *sisäinen korko* r ehdosta

$$\sum_{j=0}^T (1+r)^{-j} B(j) = 0.$$

Osoita, että sisäinen korko on yksikäsitteisenä olemassa ja että

$$\min(i_1, \dots, i_T) \leq r \leq \max(i_1, \dots, i_T).$$

4. Olkoon korkomalli luottojen kohdan 2 mukainen. Oletetaan, että seuraavien kassavirtojen I, II ja III arvot hetkellä nolla ovat samat:

$$(I) B(\Delta) = 6, B(2\Delta) = 6 \quad (II) B(\Delta) = 5, B(2\Delta) = 8 \quad (III) B(\Delta) = 0, B(2\Delta) = 14.$$

Osoita, että markkinoilla on arbitraasimahdollisuus.

5. Olkoon korkomalli luottojen kohdan 2 mukainen. Tarkastellaan lainaa, jossa henkilö saa hetkellä nolla pankilta määrän $L_0 > 0$. Sopimuksen mukaan laina maksetaan takaisin korkoineen siten, että lainansaaja maksaa pankille määrän $B(j\Delta)$ ajanhetkenä $j\Delta$, $j = 1, \dots, T$. Määritellään

$$\begin{aligned} I_j &= [(1+i_j)^\Delta - 1]L_{j-1} && \text{(koron osuus),} \\ M_j &= B(j\Delta) - I_j && \text{(lyhennyksen osuus),} \\ L_j &= L_{j-1} - M_j && \text{(lainan määrä hetkellä } j\Delta), \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, T$. Osoita, että arbitraasivapailla markkinoilla

$$L_0 = M_1 + \dots + M_T.$$