

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Reaaliluvut

Harjoitus 7

Viikolle 29.4-03.5.2013.

- Osoita (määritelmästä lähtien), että rationaalilukujen \mathbb{Q} järjestysrelaatio \leq on täysi järjestys joukossa \mathbb{Q} .
- Olko $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ja oletetaan, että $x \leq y$.
 - Osoita, että $x + z \leq y + z$.
 - Oletetaan lisäksi, että $z \geq 0$. Osoita, että $x \cdot z \leq y \cdot z$.
- a) Olkoon $m \in \mathbb{Z}$ ja olkoon

$$A = \{z \in \mathbb{Z} \mid m \leq z\}.$$

Osoita, että kuvaus $f: A \rightarrow \mathbb{N}$, $f(z) = z - m$ on hyvin määritelty järjestettyjen joukkojen isomorfismi. Mikä on sen käänteiskuvaus?

b) Päättele a)-kohdan avulla, että jokaisessa alhaalta rajoitetussa \mathbb{Z} :n osajoukossa on pienin alkio.

c) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja oletetaan, että $b - a > 1$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku $n \in \mathbb{Z}$ jolle

$$a < n < b.$$

(Ohje: aloita ottamalla pienin kokonaisluku m jolle $m > b$).

- Olkoon $D \subset \mathbb{Q}$ Dedekindin leikkaus. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}$ siten, että $a \in D, b \notin D$. Osoita, että

$$a < b.$$

- Olkoon

$$D = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ tai } a^2 < 2\}$$

- Osoita, että D on Dedekindin leikkaus.
- Osoita, että D on avoin Dedekindin leikkaus (ohje: jos $r > 0$ ja $r \in D$, etsi tarpeeksi iso $n \in \mathbb{N}$ siten, että $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$).
- Osoita, että ei ole olemassa $r \in \mathbb{Q}$ siten, että $D = D(r)$.

- Osoita osittelulaki

$$(D + E)F = DF + EF$$

tapauksessa D, E, F ovat positiivisia Dedekindin leikkauksia (suoraan määritelmästä).

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.