Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 6
Viikolle 22.4-26.4.2013.

1. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko ja olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kanoninen upotus, joka määritellään induktiolla ehdoilla
$$f(0) = 0_{\mathbb{R}},$$
$$f(n+1) = f(n) + 1_{\mathbb{R}}.$$
Osoita (induktiolla), että kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ pätee
$$f(n+m) = f(n) + f(m),$$
$$f(nm) = f(n)f(m).$$
Näytä, että lisäksi $f(1) = 1$.

2. a) Osoita, että kokonaislukujen kertolasku on vaihdannainen ja liitännäinen.
b) Osoita, että kokonaisluku $1 = \langle 1, 0\rangle$ on kokonaislukujen kertolaskun neutraalialkio.

3. a) Osoita, että kaikilla $x, y, z \in \mathbb{Z}$ pätevät osittelulait
$$(x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz.$$
b) Osoita kertolaskun supistussäännön; jos $xz = yz$ ja $z \neq 0$, niin $x = y$.

4. a) Osoita, että relaatio $\leq$ kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$,
$$\langle n, m\rangle \leq \langle p, q\rangle \text{ jos ja vain jos } n + q \leq p + m,$$
on hyvin määritelty ja on täysi järjestys joukossa $\mathbb{Z}$.

5. Osoita, että kaikilla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätevät seuraavat säännöt.
   (i) Jos $a \leq b$, niin $a + c \leq b + c$.
   (ii) Jos $a \leq b$ ja $c \geq 0$, niin $ac \leq bc$.

6. a) Osoita, että rationalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen.
b) Osoita, että rationaalilukujen joukossa pätee osittelulaki

$$(x + y)z = xz + yz.$$

7*. Olkoon $(X, \leq)$ täysin järjestetty joukko. Osoita, että se ei ole hyvinjärjestetty jos ja vain jos se sisältää osajoukon X', joka on järjestettynä joukkona isomorfinen negatiivisten kokonaislukujen joukon

$$\ldots < -n < \ldots < -2 < -1$$

kanssa.

8*. Olkoon K järjestetty kunta. Määritellään induktiolla kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to K$, asettamalla

$$f(0) = 0_K,$$

$$f(n + 1) = f(n) + 1_K.$$

a) Osoita, että jos $n < m$ joukossa $\mathbb{N}$, niin $f(n) < f(m)$ joukossa K. Päättele tästä, että f on injektio, joten K:n positiivisten alkioiden joukko on ääretön.

Oletetaan, että K:n ei-negatiivisten alkioiden osajoukko K_+ on hyvinjärjestetty.
b) Osoita, että ei ole olemassa alkiota $x \in K$ jolle $0 < x < 1$ (Ohje: tarkastele x:n potenssejä x^n. Edellisestä tehtävästä on hyötyä).
c) Osoita, että $K_+ = f(\mathbb{N})$. (Ohje: vasta-oletuksella oletetaan, että on olemassa $\omega > f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jolloin jono $\omega - f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ tuhoaa hyvinjärjestyksen. a)-kohdan avulla taas näytetään, että $f(n)$:n ja $f(n+1)$:n välillä ei ole mitään alkioita). Näin ollen K_+ on isomorfinen $\mathbb{N}$:n kanssa.

* Ylimääräinen ei-pakollinen tehtävä, josta saa lisäpisteitä.

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.