

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Reaaliluvut

Harjoitus 5

Viikolle 15.4-19.4.2013.

1. Olkoot (X, \leq) ja (Y, \leq') täysin järjestetyt joukot ja olkoon $x \in X$. Oletetaan, että $f: X \rightarrow Y$ on järjestettyjen joukkojen isomorfismi. Osoita, että alkusegmentin $I(x)$ kuva $f(I(x))$ on eräs alkusegmentti $I(y)$. Mikä Y :n alkio on tällöin alkio y ?

2. a) Osoita induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$n + 1 = 1 + n.$$

- b) Osoita, että luonnollisten lukujen yhteenlasku $+$ on vaihdannainen,

$$n + m = m + n, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

3. a) Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \cdot 1 = n$.
b) Osoita (induktiolla) osittelulaki

$$(n + m)k = nk + mk.$$

Tässä tehtävässä saa käyttää vain kertolaskun määritelmää ja yhteenlaskun ominaisuuksia.

4. Osoita, että luonnollisten lukujen kertolasku on vaihdannainen,

$$nm = mn \text{ kaikilla } n, m \in \mathbb{N}.$$

Edellisessä tehtävässä osoitettua osittelulakia saa käyttää.

5. Osoita, että luonnollisten lukujen kertolasku on liitännäinen,

$$(nm)k = n(mk) \text{ kaikilla } n, m, k \in \mathbb{N}.$$

Edellisissä tehtävissä osoitettuja osittelulakia ja kertolaskun vaihdannaisuutta saa käyttää.

6. Olkoon X joukko. Osoita, että X on ääretön jos ja vain jos $|\mathbb{N}| \leq X$.

- 7*. a) Olkoon X joukko. Osoita, että on olemassa hyvinjärjestys \leq joukossa X siten, että jokaiselle alkusegmentille $I(x)$, $x \in X$, pätee $|I(x)| < |X|$.
b) Olkoon \leq' jokin toinen hyvinjärjestys X :ssä. Osoita, että (X, \leq) on isomorfinen (X, \leq') :n erään alkusegmentin $I(x)$ kanssa.

* Ylimääräinen ei-pakollinen tehtävä, josta saa lisäpisteitä.

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.