Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 4
Viikolle 8.4-12.4.2013.

1. Olkoon X äärellinen joukko ja a mikä tahansa alkio. Osoita suoraan äärellisen joukon määritelmästä lähtien, että joukko $X \cup \{a\}$ on myös äärellinen.
   (Havainnollisesti - jos äärelliseen joukkoon lisätään yksi uusi alkio, se pysyy äärellisenä).

2. Osoita edellisen tehtävän avulla, että luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ ei ole suurinta alkiota. $\mathbb{N}$ määritellään kuten Määritelmässä 59.
   (Opastus: mieti suurimman alkion määrämää alkusegmenttia).

3. Luennoilla on esitetty osittaisjärjestetty joukko $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subset)$ diagrammina

$$\begin{tikzcd} & x_4 & & . \\ x_2 \arrow[ur] & & x_3 \arrow[ul] \\ & x_1 \arrow[ul] \arrow[ur] \end{tikzcd}$$

   (kts. materiaalin esimerkkiä 48). *Ketju* on sellainen osittaisjärjestetyn joukon osajoukko, joka on osittaisjärjestettynä joukkona itse täysin järjestetty. Ketju on *maksimaalinen* jos se ei sisälly mihinkään aidosti isompaan ketjuun. Esimerkiksi diagrammissa yllä osajoukko $\{x_1, x_2\}$ on ketju ja $\{x_2, x_3\}$ ei ole. Ketju $\{x_1, x_2\}$ ei ole maksimaalinen, koska se sisältyy isompaan ketjuun $\{x_1, x_2, x_4\}$. Tämä ketju on puolestaan jo maksimaalinen.
   a) Esitä kolmen alkion joukon $A = \{a, b, c\}$ potenssijoukko $X = \mathcal{P}(A)$ samanlaisena diagrammina. Tässä tietysti X varustetaan järjestyksellä $\subset$.
   b) Anna kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta ei-maksimaalisesta ketjusta X:ssä, joka sisältää alkion $\{a, c\}$ ja kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta X:n osajoukosta, joka sisältää alkion $\{a, c\}$, mutta ei ole ketju.
   c) Anna esimerkki maksimaalisesta ketjusta X:stä, joka sisältää alkion $\{a, c\}$. Osaatko antaa toisen esimerkin vain onko tällainen ketju yksikäsitteinen?

4. Olkoon $(X, \leq)$ osittaisjärjestetty joukko. Oletetaan, että jokaisella X:n

epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio. Osoita, että $(X, \leq)$ on täysin järjestetty.

5. a) Olkoon $(X, \leq)$ hyvinjärjestetty joukko, jolla ei ole suurinta alkiota. Osoita, että *seuraajakuvaus* $f\colon X \to X$, $f(x) = x^+$ on injektio, mutta ei ole surjektio.
   b) Osoita (a-kohdan avulla), että äärellisellä hyvinjärjestetyllä joukolla on aina olemassa suurin alkio.
   (Huom. äärellisyydestä saa olettaa vain määritelmän (määritelmä 39)).

6. Olkoot $(A, \leq)$ ja $(B, \leq')$ osittaisjärjestettyjä joukkoja ja oletetaan, että joukot A ja B ovat erillisiä eli $A \cap B = \emptyset$. Määritellään yhdisteessä $A \cup B$ relaatio $\preceq$ vaatimalla, että $x \preceq y$ jos ja vain jos yksi seuraavista ehdoista pätee
   (i) $x, y \in A$ ja $x \leq y$,
   (ii) $x, y \in B$ ja $x \leq' y$,
   (iii) $x \in A$ ja $y \in B$.
   Toisin sanoen A:ssä ja B:ssä pidetään alkuperäisiä järjestyksiä ja lisäksi laitetaan jokainen A:n alkio edeltämään jokaista B:n alkiota.
   a) Osoita, että $(A \cup B, \preceq)$ on todellakin osittaisjärjestetty joukko.
   b) Oletetaan, että $(A, \leq)$ ja $(B, \leq')$ ovat molemmat täysin järjestettyjä. Osoita, että tällöin myös $(A \cup B, \preceq)$ on täysin järjestetty.
   c) Oletetaan, että $(A, \leq)$ ja $(B, \leq')$ ovat molemmat hyvinjärjestettyjä. Osoita, että tällöin myös $(A \cup B, \preceq)$ on hyvinjärjestetty.

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.