

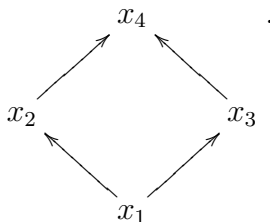
## Matematiikan ja tilastotieteen laitos

### Reaaliluvut

#### Harjoitus 4

Viikolle 8.4-12.4.2013.

1. Olkoon  $X$  äärellinen joukko ja  $a$  mikä tahansa alkio. Osoita suoraan äärellisen joukon määritelmästä lähtien, että joukko  $X \cup \{a\}$  on myös äärellinen.  
(Havainnollisesti - jos äärelliseen joukkoon lisätään yksi uusi alkio, se pysyy äärellisenä).
2. Osoita edellisen tehtävän avulla, että luonnollisten lukujen joukossa  $\mathbb{N}$  ei ole suurinta alkioita.  $\mathbb{N}$  määritellään kuten Määritelmässä 59.  
(Opastus: mieti suurimman alkion määrämää alkusegmenttia).
3. Luennoilla on esitetty osittaisjärjestetty joukko  $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subset)$  diagrammina



(kts. materiaalin esimerkkiä 48). *Ketju* on sellainen osittaisjärjestetyn joukon osajoukko, joka on osittaisjärjestettynä joukossa itse täysin järjestetty. Ketju on *maksimaalinen* jos se ei sisälly mihinkään aidosti isompaan ketjuun. Esimerkiksi diagrammissa yllä osajoukko  $\{x_1, x_2\}$  on ketju ja  $\{x_2, x_3\}$  ei ole. Ketju  $\{x_1, x_2\}$  ei ole maksimaalinen, koska se sisältyy isompaan ketjuun  $\{x_1, x_2, x_4\}$ . Tämä ketju on puolestaan jo maksimaalinen.

- a) Esitä kolmen alkion joukon  $A = \{a, b, c\}$  potenssijoukko  $X = \mathcal{P}(A)$  samanlaisena diagrammina. Tässä tietysti  $X$  varustetaan järjestyksellä  $\subset$ .
  - b) Anna kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta ei-maksimaalisesta ketjusta  $X$ :ssä, joka sisältää alkion  $\{a, c\}$  ja kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta  $X$ :n osajoukosta, joka sisältää alkion  $\{a, c\}$ , mutta ei ole ketju.
  - c) Anna esimerkki maksimaalisesta ketjusta  $X$ :stä, joka sisältää alkion  $\{a, c\}$ . Osaatko antaa toisen esimerkin vain onko tällainen ketju yksikäsitteinen?
4. Olkoon  $(X, \leq)$  osittaisjärjestetty joukko. Oletetaan, että jokaisella  $X$ :n

epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio. Osoita, että  $(X, \leq)$  on täysin järjestetty.

5. a) Olkoon  $(X, \leq)$  hyvinjärjestetty joukko, jolla ei ole suurinta alkioita. Osoita, että seuraajakuvaus  $f: X \rightarrow X$ ,  $f(x) = x^+$  on injektio, mutta ei ole surjektio.  
b) Osoita (a-kohdan avulla), että äärellisellä hyvinjärjestetyllä joukolla on aina olemassa suurin alkio.  
(Huom. äärellisyydestä saa olettaa vain määritelmän (määritelmä 39)).

6. Olkoot  $(A, \leq)$  ja  $(B, \leq')$  osittaisjärjestettyjä joukkoja ja oletetaan, että joukot  $A$  ja  $B$  ovat erillisiä eli  $A \cap B = \emptyset$ . Määritellään yhdisteessä  $A \cup B$  relaatio  $\preceq$  vaatimalla, että  $x \preceq y$  jos ja vain jos yksi seuraavista ehdoista pätee  
(i)  $x, y \in A$  ja  $x \leq y$ ,  
(ii)  $x, y \in B$  ja  $x \leq' y$ ,  
(iii)  $x \in A$  ja  $y \in B$ .

Toisin sanoen  $A$ :ssä ja  $B$ :ssä pidetään alkuperäisiä järjestyksiä ja lisäksi laitetaan jokainen  $A$ :n alkio edeltämään jokaista  $B$ :n alkioita.

- a) Osoita, että  $(A \cup B, \preceq)$  on todellakin osittaisjärjestetty joukko.  
b) Oletetaan, että  $(A, \leq)$  ja  $(B, \leq')$  ovat molemmat täysin järjestettyjä. Osoita, että tällöin myös  $(A \cup B, \preceq)$  on täysin järjestetty.  
c) Oletetaan, että  $(A, \leq)$  ja  $(B, \leq')$  ovat molemmat hyvinjärjestettyjä. Osoita, että tällöin myös  $(A \cup B, \preceq)$  on hyvinjärjestetty.

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.