Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 3
Viikolle 1.4-5.4.2013.

1. Osoita todeksi seuraavia joukko-oppilisia kaavoja kaikille joukoille A, B, C.

   (a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$,

   (b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

   (c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

   Päätekö c)-kohdan yhtälö jos symboli $\cap$ korvataan symbolilla $\cup$:llä? Miksi/miksei?

2. Olkoon $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ suljettu yksikköväli. Tutki onko seuraava relaatio $R \subset X \times X$ kuvaus $X \to X$.

   (a) $R = \{(x, y) \in X \times X \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$,

   (b) $R = \{(x, y) \in X \times X \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$.

3. Oletetaan, että $f \colon X \to Y$ on bijektio.
   (a) Osoita, että relaatio $R \subset Y \times X$

   $$R = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

   on eräs kuvaus $g \colon Y \to X$.
   (b) Osoita, että g on itse asiassa f:n käänteiskuvaus.

4. Olkoot $f \colon X \to Y$ ja $g \colon Y \to Z$ kuvauksia. Osoita, että
   (a) Jos $g \circ f$ on injektio, niin f on injektio.
   (b) Jos $g \circ f$ on surjektio, niin g on surjektio.
   Päättele tästä seuraavaa.
   Olkoon f kuvaus, jolla on olemassa käänteiskuvaus. Tällöin f on bijektio.

5. Jos a ja b ovat reaalilukuja ja $a < b$, määritellään avoin väli $]a, b[$ ja suljettu väli $[a, b]$ joukkoina

   $$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

   $$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

a) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b$. Keksi jokin bijektio $[a, b] \to [a + c, b + c]$, joka kuvaa päätepisteet a ja b päätepisteille $a + c, b + c$. Miten tästä seuraa, että vastaavilla avoimilla väleillä $]a, b[$ ja $]a + c, b + c[$ on sama mahtavuus?
b) Osoita, että $f\colon]0, 1[\to]0, a[$, $f(x) = ax$ on hyvin määritelty bijektio.
c) Päättele, että kaikki $\mathbb{R}$:n rajoitetut välit (sekä avoimet, että suljetut) ovat yhtämahtavia, esimerkiksi $|]0, 1[| = |[0, 1]|$.

6. Olkoot $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ kuvauksia. Osoita, että
(a) jos f ja g ovat injektioita, myös $g \circ f$ on injektio,
(b) jos f ja g ovat surjektioita, myös $g \circ f$ on surjektio,
(c) jos f ja g ovat bijektioita, myös $g \circ f$ on bijektio.

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.