Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 2
Viikolle 18.3-22.3.2013.

1. Osoita, että reaalilukujen "Pienempi kuin" relaatio $<$ toteuttaa seuraavia ehtoja.

   D'(i) $x < x$ ei päde millään $x \in \mathbb{R}$.

   D'(ii) Olkoot x, y reaalilukuja. Tällöin päde täsmälleen yksi seuraavista väitteistä:
   $$x < y \text{ tai } x = y \text{ tai } y < x.$$

   D'(iii) Olkoot x, y, z reaalilukuja. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$.

   E'(i) Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tällöin jos $x < y$, niin $x + z < y + z$.

   E(ii) Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tällöin jos $x < y$ ja $0 < z$, niin $x \cdot z < y \cdot z$.

2. Olkoon $(K, +, \cdot, \leq)$ järjestetty kunta, eli systeemi, joka toteuttaa kaikki reaalilukujen aksioomat paitsi ehkä täydellisyysaksioomaa F.
   Olkoon P kunnan K positiivisten alkioiden osajoukko,
   $$P = \{x \in K \mid x > 0\}.$$
   Tässä relaatio $>$ määritellään luonnollisesti samalla tavalla kuin reaalilukujen tapauksessa eli $x > y$ tarkoittaa, että $y \leq x$ ja $y \neq x$.
   Osoita, että

   (i) P on suljettu yhteen- ja kertolaskun suhteen, eli kaikilla $x, y \in P$ pätee $x + y, xy \in P$,

   (ii) kaikilla $x \in K$ tasan yksi seuraavista ehdoista toteutuu
   $$x \in P \text{ tai } x = 0 \text{ tai } -x \in P.$$

3. Oletetaan, että $(K, +, \cdot)$ on kunta. Oletetaan, että on olemassa K:n osajoukko P joka toteuttaa seuraavia ehtoja.

   (i) P on suljettu yhteen- ja kertolaskun suhteen, eli kaikilla $x, y \in P$ pätee $x + y, xy \in P$.

   (ii) Kaikilla $x \in K$ tasan yksi seuraavista ehdoista toteutuu
   $$x \in P \text{ tai } x = 0 \text{ tai } -x \in P.$$

Määritellään K:ssä relaatio $\leq$ ehdolla

$$x \leq y \text{ jos ja vain jos } y - x \in P \text{ tai } x = y.$$

Osoita, että $(K, +, \cdot, \leq)$ on järjestetty kunta ja P on tällöin sen positiivisten alkioiden osajoukko.

4. Olkoon K kunta, jossa luvulla -1 on neliöjuuri, toisin sanoen sellainen alkio $x \in K$ jolle $x^2 = -1$. Osoita, että ei ole olemassa tapa tehdä K:stä järjestetty kunta.
(Vihje: jos tällainen tapa olisi olemassa, olisiko -1 positiivinen vain negatiivinen? Entäs 1?).

5. Olkoon A reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko. Määritellään osajoukko $-A$ kaavalla
$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$
Toisin sanoen $-A$ koostuu A:n vasta-alkioista.
a) Oletetaan, että A on alhaalta rajoitettu ja epätyhjä. Osoita, että tällöin $-A$ on ylhäältä rajoitettu ja
$$-\sup(-A) = \inf A.$$
b) Osoita a)-kohda avulla, että jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla osajoukolla on olemassa suurin alaraja eli infimum.

6. Olkoon A ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä $\mathbb{R}$:n osajoukko ja olkoon x reaaliluku. Osoita, että $x = \sup A$ jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa.

   (i) $a \leq x$ jokaisella $a \in A$ ja
   (ii) jokaisella positiivisella reaaliluvulla $\varepsilon > 0$ on olemassa $b \in A$ siten, että $b > x - \varepsilon$.

   Formuloi samannäköinen karakterisaatio infimumille.

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.