

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 1

Tehtävissä (1)-(3) 'reaaliluvuilla' tarkoitetaan olioita, jotka toteuttavat reaalilukujen määritelmän 1 aksioomia. Ratkaisuihin saa käyttää vain näitä aksioomia, luentomateriaalissa todistettuja niiden seurauksia sekä edellisissä tehtävissä jo osoitettuja väitteitä.

1. Määritellään reaaliluvut 2, 3, 4 kaavoilla

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1.$$

Osoita tarkasti määritelmistä lähtien, että $2 + 2 = 4$. Mitä aksioomia joudut käyttämään?

2. Osoita, että reaaliluvut toteuttavat seuraavia kaavoja.

$$-(-x) = x, \text{ kaikilla reaaliluvuilla } x$$

$$a(b - c) = ab - ac, \text{ kaikilla reaaliluvuilla } a, b, c$$

$$a(-b) = (-a)b = -(ab), \text{ kaikilla reaaliluvuilla } a, b$$

$$(-a)(-b) = ab, \text{ kaikilla reaaliluvuilla } a, b$$

3. Osoita, että seuraavat kaavat ovat voimassa kaikille reaaliluvuille a, b, c, d , $a, b, d \neq 0$.

$$\frac{ab}{ad} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

(tehtävät jatkuvat seuraavalle sivulle!)

4. Olkoon $X = \{a, b\}$ kahden alkion alkio. Määritellään X :ssä laskutoimituksia $+$ ja \cdot kaavoilla

$$a + a = b + b = a, a + b = b + a = b,$$

$$a \cdot a = a \cdot b = b \cdot a = a, b \cdot b = b.$$

- a) Osoita, että systeemi $(X, +, \cdot)$ toteuttaa aksioomia A(i)-(iv), B(i)-(iv) ja C reaalilukujen määritelmästä. Mikä alkio on nolla-alkio 0 ja mikä alkio on 1?
- b) Näytä, että X :ssä $x = -x$ jokaisella alkiolla x , erityisesti $1 = -1$.
- c) Määritellään alkio 2, 3, 4 joukossa X samoilla kaavoilla kuin tehtävässä 1,

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1.$$

Selvitä kumpi alkioista a, b on alkio 2, alkio 3, alkio 4. Päätekö yhtälö $2 + 2 = 4$ joukossa X ?

Laskuharjoituksista on palautettavaa vähintään 50% kurssin läpäisemiseksi. Kurssi suoritetaan laskuharjoituksella ja kirjallisella esitelmällä. Arvosana määräytyy tehtyjen laskuharjoitusten määrällä ja esitelmän laadulla. Luennoilla 50% läsnäolopakko. Läsnäolopakkoa ja tekemättä jääneitä harjoitustehtäviä pystyy kuitenkin aina korvamaan lisätehtävillä. Asiasta sovitaan luennoitsijan kanssa.