Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 7
Ratkaisuehdotuksia.

1. Osoita (määritelmästä lähtien), että rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ järjestysrelaatio $\leq$ on täysi järjestys joukossa $\mathbb{Q}$.

   Ratkaisu: Järjestysrelaatio $\mathbb{Q}$:ssä on määritelty ehdolla

   $$[m,n] \leq [p,q] \text{ jos ja vain jos } mq \leq np,$$

   missä oletetaan, että molemmat rationaaliluvut $x = [m,n], y = [p,q]$ ovat määriteltyjä sillä tavalla, että "nimittäjät" n, q valitaan aidosti positiivisiksi kokonaisluvuiksi. Järjestysrelaatio oikealla puolella on kokonaislukujen järjestys.
   Luennoilla todistettiin, että tämä järjestysrelaatio on hyvin määritelty eli ei riipu edustajien valinnoista (kunhan nimittäjät valitaan positiivisiksi). Osoitetaan, että $\leq$ on täysi järjestys $\mathbb{Q}$:ssä.

   (i) Refleksivisyys. Jos $x = [m,n] \in \mathbb{Q}$, niin selvästi $mn \leq nm = mn$. Näin ollen $x \leq x$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$.
   (ii) Antisymmetrisyys. Oletetaan, että $[m,n] \leq [p,q]$ ja $[p,q] \leq [m,n]$. Tällöin $mq \leq np$ ja $np = pn \leq qm = mq$. Koska $\mathbb{Z}$:n antisymmetrisyys tiedetään olevan voimassa, $mq = np$, mistä taas rationaalilukujen määritelmän mukaan saadaan $x = y$.
   (iii) Transitivisuus. Oletetaan, että $x = [m,n] \leq [p,q] = y$ ja $y = [p,q] \leq [r,s] = z$. Tällöin $mq \leq np$ ja $ps \leq qr$. Koska n ja s oletetaan tässä olevan aidosti positiivisia, niillä saa kertoa epäyhtälöitä, jolloin saadan

   $$(mq)s \leq (np)s = n(ps) \leq n(qr) = (nr)s.$$

   Toisaalta epäyhtälöstä saa $\mathbb{Z}$:ssä supistaa positiivisia tekijöitä (miksi?), joten supistamalla s saadaan

   $$ms \leq nr,$$

   mikä takaa sen, että $x \leq z$.
   (iv) Olkoot $x = [m,n], y = [p,q]$ mielivaltaisia rationaalilukuja, jossa edellytään $n, q > 0$. Kahdesta kokonaisluvusta mq ja np toinen on suurempi tai yhtä suuri kuin toinen (järestys tiedetään olevan täysi $\mathbb{Z}$:ssä), joten joko $mq \leq np$ tai $np \leq mq$. Edellisessä tapauksessa $x \leq y$, jälkimmäisessä $y \leq x$.

2. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ja oletetaan, että $x \leq y$.
(i) Osoita, että $x + z \leq y + z$.
(ii) Oletetaan lisäksi, että $z \geq 0$. Osoita, että $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Ratkaisu:
(i) Käytetään hyväksi sitä, että äärellinen määrä rationaalilukuja voidaan aina esittää ”samannimisinä”. Tarkemmin, jos $x = [m, n]$, $y = [p, q]$ ja $z = [r, s]$ (missä voimme lisäksi olettaa, että $n, q, s > 0$, niin rartionaalilukujen määritelmän mukaan yhtä hyvin

$$x = [mqs, nqs], y = [pns, nqs], z = [nqr, nqs]$$

(laavennetaan samannimisiksi!). Näin ollen voimme tehtävässä olettaa, että $x = [m, n]$, $y = [p, n]$ ja $z = [q, n]$ ovat kaikki ”samannimisiä”. Tällöin (koska positivisten kokonaislukujen tulo on positiivinen, mieti miksi) voidaan lisäksi tehdä tästä yhteisestä nimittäjästä postiivisen. Nyt

$$x + z = [mn + qn, nn] = [(m + q)n, nn] = [m + q, n], \text{ ja yhtä hyvin}$$

$$y + z = [p + q, n].$$

Jos oletetaan, että $x \leq y$, niin se tarkoittaa sitä, että $mn \leq pn$ ja koska $n > 0$, tämä on yhtäpitävä epäyhtälön $m \leq p$ kanssa. Tällöin $m + q \leq p + q$ (vastaavia sääntöjä kokonaisluvuille tunnetaan), joten $x + z \leq y + z$.

(ii) Voidaan taas olettaa, että $x = [m, n]$, $y = [p, n]$ ja $z = [q, n]$, missä $n > 0$. Nyt $x \leq y$ tarkoittaa sitä, että $m \leq p$ (kts. (i)-kohdan todistusta). Koska

$$xz = [mq, n^2], yz = [pq, n^2],$$

$xz \leq yz$ tarkoittaa että

$$mq \leq pq$$

(koska $n^2 > 0$). Koska oletamme, että $z \geq 0 = [0, 1]$, se tarkoittaa määritelmän mukaan, että $q \leq 0$, joten $m \leq n$ tosiaankin implikoi sen, että $mq \leq pq$. Tämä todistaa väitteen.

3. a) Olkoon $m \in \mathbb{Z}$ ja olkoon

$$A = \{z \in \mathbb{Z} \mid m \leq z\}.$$

Osoita, että kuvaus $f\colon A \to \mathbb{N}$, $f(z) = z - m$ on hyvin määritelty järjestettyjen joukkojen isomorfismi. Mikä on sen käänteiskuvaus?
b) Päättele a)-kohdan avulla, että jokaisessa alhaalta rajoitetussa epätyhjässä $\mathbb{Z}$:n osajoukossa on pienin alkio.
c) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja oletetaan, että $b - a > 1$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku $n \in \mathbb{Z}$ jolle

$$a < n < b.$$

Ratkaisu:

a) f on hyvin määritely, koska jokaisella $z \in A$ pätee (määritelmän mukaan) $z \geq m$, joten $z - m \geq 0$. Koska $z, m \in \mathbb{Z}$, $z - m$ on siis ei-negatiivinen kokonaisluku, eli luonnollinen luku.

Olkoon $g\colon \mathbb{N} \to A$, $g(n) = n + m$. Samalla tavalla kuin yllä nähdään, että g on hyvin määritelty, Lisäksi kaikilla $z \in A, n \in \mathbb{N}$ pätee

$$(f \circ g)(n) = f(n + m) = (n + m) - m = n,$$

$$(g \circ f)(z) = g(z - m) = (z - m) + m = z.$$

Näin ollen g on f:n käänteiskuvaus, joten f on bijektio. Lisäksi jos $z \leq z'$, niin

$$f(z) = z - m \leq z' - m = f(z').$$

Näin ollen f on bijektiivinen morfismi. Koska A on täysin järjestetty, Lemman 54 nojalla f on järjestettyjen joukkojen isomorfismi.

b) Tehtävän muotoilu on hieman epätäsmällinen - oletusta ”alhaalta rajoitettu Z:n osajoukko A ” voi tulkita tarkoittamaan ”on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $a \geq m$ kaikilla $a \in A$” tai (näennäiesti) vahvemmin ”on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $a \geq x$ kaikilla $a \in A$”. Molemmat ehdot ovat itse asiassa yhtäpitäviä, mutta tätä pitää osoittaa ja siihen tarvitaan Arkhimedeen ehtoa $\mathbb{R}$:ssä. Ensimmäinen tulkinta on tämän kurssin määritelmien mukainen, mutta se ei riitä c)-kohdassa, joten osoitetaan ensin, että molemmat tulkinnat ovat ekvivalentteja.
Olkoon $A \subset \mathbb{Z}$. Jos on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $a \geq m$ kaikilla $a \in A$, niin erityisesti on olemassa $x = m \in \mathbb{R}$ jolle pätee sama ehto. Tämä suunta on triviaali.
Oletetaan kääntäen, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $a \geq x$ kaikilla $a \in A$ ja näytetään, että x voidaan korvata jollakin kokonaisluvulla m.

Arhimedeen ehdon (Lemma 107) nojalla on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $-x \leq n$- Tällöin $m = -n \in \mathbb{Z}$ ja $a \geq x \geq m$ kaikilla $a \in A$, joten $a \geq m$ kaikilla $a \in A$.

Olkoon $A \subset \mathbb{Z}$ alhaalta rajoitettu $\mathbb{R}$:ssä ja epätyhjä (juuri tässä muodossa tätä kohtaa sovelletaan c)-kohdassa). Tällöin edellisen tarkastelun nojalla on olemassa jopa $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $a \geq m$ kaikilla $a \in A$. Olkoon

$$B = \{z \in \mathbb{Z} \mid m \leq z\}.$$

Edellisestä seuraa, että $A \subset B$. a)-kohdan nojalla $B \cong \mathbb{N}$ järjestettynä joukkona. Koska $\mathbb{N}$ on hyvinjärjestetty, myös sen kanssa isomorfinen joukko B on hyvinjärjestetty (isomorfisilla joukoilla ”samoja ominaisuuksia”). Näin ollen, koska A on hyvinjärjestetyn joukon B epätyhjä osajoukko, siinä on pienin alkio.

c)Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja oletetaan, että $b - a > 1$. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq b\} \subset \mathbb{Z}.$$

Arhimedeen ehdon (Lemma 107) nojalla on olemassa jopa luonnollinen luku n siten, että $n \geq b$ eli $n \in A$. Erityisesti A on epätyhjä. Lisäksi se on alhaalta rajoitettu $\mathbb{R}$:ssä, sillä määritelmän mukaan juuri b on sen eräs alaraja. Edellisen kohdan nojalla on olemassa $m = \min A$. Osoitetaan, että

$$a < m - 1 < b.$$

Koska $m - 1 \in \mathbb{Z}$, olemme tällöin valmiit.
Koska m on pienin kokonaisluku, jolle pätee $m \geq b$, niin sitä pienimmälle kokonaisluvulle $m - 1$ pätee $m - 1 < b$.
Jos olisi $a \geq m - 1$, niin olisi

$$1 = m - (m - 1) \geq b - a > 1,$$

mikä on ristiriita.

4. Olkoon $D \subset \mathbb{Q}$ Dedekindin leikkaus. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}$ siten, että $a \in D, b \notin D$. Osoita, että
$$a < b.$$

Ratkaisu:
Jos olisi $b \geq a$, niin Dedekindin leikkauksen määritelmän mukaan olisi $b \in D$, sillä D on ideaali ja $a \in D$.

5. Olkoon
$$D = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ tai } a^2 < 2\}$$

a) Osoita, että D on Dedekindin leikkaus.
b) Osoita, että D on avoin Dedekindin leikkaus.
c) Osoita, että ei ole olemassa $r \in \mathbb{Q}$ siten, että $D = D(r)$.

Ratkaisu:
a) Jokainen negatiivinen rationaaliluku on joukossa D, samoin esimerkiksi luvut $a = 0$ tai $a = 1$. Erityisesi D on selvästi epätyhjä. Toisaalta jos $a = 2 \in \mathbb{Q}$ niin molemmat väitteet $a < 0$ ja $a^2 < 2$ eivät päde, joten $a \notin D$. Näin ollen $D \neq \mathbb{Q}$.
Osoitetaan, että D on ideaali. Oletetaan, että $a \in D$ ja $b < a$. Jos $b < 0$, niin $b \in D$ suoraan D:n määritelmän nojalla. Jos taas $b \geq 0$, niin myös $a \geq 0$, joten pakko olla $a^2 < 2$. Koska luvut b ja a ovat epänegatiivisia
$$b^2 = b \cdot b \leq b \cdot a \leq a \cdot a = a^2 < 2,$$
joten $b \in D$.

b) Tehdään vasta-oletus - on olemassa $a \in D$ joka on suurin D:n alkio ja johdetaan täsät ristiriita näyttämällä, että on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että myös $a + 1/n$ (joka selvästi suurempi kuin a) on myös D:n alkio. Koska $1 \in D$, erityisesti $a \geq 1 > 0$. Näin ollen D:n määritelmän nojalla $a^2 < 2$. Merkitään
$$t = 2 - a^2 > 0.$$
Toisalta $2 \notin D$, joten edellisen tehtävän ja a)-kohdan nojalla $a < 2$. Olkoon $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ mielivaltainen. Nyt
$$(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{5}{n}.$$
Tässä olemme käyttäneet hyväksi sitä, että $a < 2$ ja $n^2 \geq n$ (koska $n \geq 1$). Koska $a^2 = 2 - t$ saadaan
$$(a + \frac{1}{n})^2 \leq a^2 + \frac{5}{n} = 2 + (\frac{5}{n} - t).$$
Jos valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $5/n < t$ eli $n > 5/t$ (tämä on mahdollista Arkhimedeen ehdon nojalla), niin
$$(a + \frac{1}{n})^2 < 2,$$

mikä on haluttu ristiriita.

c) Tehdään vasta-oletus,

$$D = D(r) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$$

jollakin $r \in \mathbb{Q}$. Tällöin $r \notin D$, joten $r > 0$ ja $r^2 \geq 2$. Koska rationaalilukujen joukossa ei ole olemassa alkioita r joille $r^2 = 2$, niin itse asiassa välttämättä $r^2 > 2$. Johdetaan ristiriita näyttämällä, että tällöin tarpeeksi isolla $n \in \mathbb{N}$ löydetään alkio r' muodossa

$$r' = r - \frac{1}{n}$$

jolle pätee $r' > 0$ ja $r'^2 > 2$. Tämä on tällöin haluttu ristiriita, sillä toisaalta $r' < r$, joten sen täytyy olla D:ssä.

$$r' = r - \frac{1}{n} > 0$$

jos $\frac{1}{n} < r$. Toista ehtoa varten lasketaan

$$(r - \frac{1}{n})^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} \geq r^2 - \frac{2r}{n} \geq r^2 - \frac{2}{n},$$

sillä $r > 1$ $(1 \in D)$. Näin ollen valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että sekä ehto $\frac{1}{n} < r$ toteutuu, että

$$\frac{2}{n} < r^2 - 2.$$

6. Osoita osittelulaki

$$(D + E)F = DF + EF$$

tapauksessa D, E, F ovat positiiviisia Dedekindin leikkauksia (suoraan määritelmästä).

Ratkaisu:

Oletetaan, että D, E, F ovat positiivisia Dedekindin leikkauksia. Huomaa erityisesti, tällöin jokainen leikkauksista D, E, F sisältää (positiivisuuden määritelmän mukaan) ainakin yhden positiivisen rationaaliluvun, joten koska leikkaukset ovat ideaalia, jokainen sisältää myös osajoukonaan ei-positiivisten rationaalilukujen osajoukon

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0.\}$$

Yhtälö

$$(D+E)F = DF + EF$$

on kahden joukon välinen yhtäsuuruus-väite, joten osoitetaan se perinteisesti osoitamalla, että toinen joukko sisältyy toiseen ja toisinpäin.
Ensin olkoon $x \in (D+E)F$. Koska $D, E > 0$ myös niiden summa on positiivinen Dedekindin leikkaus, $D+E > 0$ (Propositio 117). Näin ollen kertolaskun määritelmän mukaan

$$(D+E)F = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\} \cup \{af \mid a \in D+E, f \in F\}.$$

Näin ollen joko $x \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$ tai $x \in \{af \mid a \in D+E, f \in F, a, f > 0\}$.
Oletetaa, että $x \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$ eli $x \leq 0$. Määritelmän mukaan kahden positiivisen Dedekindin leikkauksen tulo on positiivinen Dedekindin leikkaus, joten DF, EF ovat molemmat positiivisia. Näin ollen myös niiden summa $DF + EF$ on positiivinen Dedekindin leikkaus, joten se sisältää joukon

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0.\}$$

Erityisesti $x \in DF + EF$.
Toinen (mielenkiintoisempi) tapaus on tapaus jossa x on muotoa $x = af$, missä $a > 0$, $f > 0$, $a \in D + E$, $f \in F$. Määritelmän mukaan

$$D + E = \{d + e \mid d \in D, e \in E.\}$$

Näin ollen $a = d + e$, missä $d \in D$ ja $e \in E$. Huomaa, että vaikka $a > 0$, molemmat d ja e eivät vältämättä ole positiivisia, voidaan takaa vain sen, että toinen niistä on positiivinen. Esimerkiksi $(-1) + 2 = 1$ on positiivinen, vaikka ensimmäinen summattava ei ole. Tästä syystä tehdään näin. Valitaan kiinnitetyt $d' \in D, e' \in E$ s.e. $d', e' > 0$. Sellaiset löytyvät, sillä D ja E ovat positiivisia leikkauksia. Olkoot

$$d'' = \max\{d, d'\},$$

$$e'' = \max\{e, e'\}.$$

Tällöin $d'' \in D, e'' \in E$, molemmat varmasti positiivisia ja $d \leq d'', e \leq e''$.
Näin ollen

$$a \leq d'' + e'' = a'',$$

joten $x \leq x'' = a''f$. Nyt $x'' = a''f = (d'' + e'')f = d''f + e''f \in DF + EF$.
Koska $DF + EF$ on Dedekindin leikkaus ja $x \leq x''$, myös $x \in DF + EF$.
Sisältyvyys

$$(D+E)F \subset DF + EF$$

on osoitettu.

Seuraavaksi olkoon $x \in DF+EF$. Tällöin määritelmän mukaan $x = y+z$, missä $y \in DF, z \in EF$. Määritelmän mukaan siis joko $y \leq 0$ tai $y = df$, missä $d \in D, f \in F$, $d, f > 0$. Samoin z:lle on kaksi vaihtoehtoa. Periaatteessa siis kaiken kaikkia tulee 4 vaihtoehtoa, joita voi tarkastella erikseen. Toisaalta helpomalla pääsee, jos käyttää samaa temppua kuin yllä ja korvaa y, z tarvittaessa isoimmilla positiivisilla alkioilla. Nimittäin tiedetään, että DF, EF ovat molemmat positiivisia, joten voidaan valita kiinteät $y' \in DF, z' \in EF$ s.e. $y', z' > 0$. Tällöin voidaan korvata y alkiolla $y'' = \max\{y, y'\}$ ja z alkiolla $z'' = \max\{z, z'\}$, jolloin saadaan uusi alkio $x'' = y'' + z'' \in DF + EF$ ja $x \leq x''$. Jos voimme näyttää, että $x'' \in (D+E)F$, niin myös $x \in (D+E)F$ (koska viimeksi mainittu on leikkaus) ja olemme valmiit.
Näin ollen voimme olettaa, että $x = y + z$, missä $y \in DF, z \in EF$, $y, z > 0$. Tällöin $y = df, z = ef'$ joillakin $d \in D, e \in E, f, f' \in F$. Olkoon $f'' = \max\{f, f'\}$, tällöin $f'' \in F$ ja

$$x = df + ef' \leq df'' + ef'' = (d+e)f'',$$

missä $(d+e)f'' \in (D+E)F$. Koska $(D+E)F$ on Dedekindin leikkaus, $x \in (D+E)F$ ja olemme valmiit.