Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 6
Viikolle 22.4-26.4.2013.

1. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko ja olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kanoninen upotus, joka määritellään induktiolla ehdoilla

$$f(0) = 0_{\mathbb{R}},$$

$$f(n+1) = f(n) + 1_{\mathbb{R}}.$$

Osoita (induktiolla), että kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ pätee

$$f(n+m) = f(n) + f(m),$$

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Näytä, että lisäksi $f(1) = 1$.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$f(1) = f(0+1) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Osoitetaan induktiolla m:n suhteen, että

$$f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Kun $m = 0$

$$f(n+m) = f(n+0) = f(n) = f(n) + 0 = f(n) + f(0).$$

Oletetaan, että

$$f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Tällöin

$$f(n+(m+1)) = f((n+m)+1) = f(n+m)+1 = (f(n)+f(m))+1 =$$

$$= f(n) + (f(m) + 1) = f(n) + f(m+1).$$

Huomaa, että olemme käyttäneet hyväksi yhteenlaskun liitännäisyyttä sekä $\mathbb{N}$:ssä, että $\mathbb{R}$:ssä.

Seuraavaksi todistetaan induktiolla m:n suhteen kaavan

$$f(nm) = f(n)f(m), n, m \in \mathbb{N}.$$

Kun $m = 0$

$$f(n0) = f(0) = 0 = f(n)0 = f(n)f(m),$$

koska nollalla kertominen antaa nollan sekä $\mathbb{N}$:ssä, että $\mathbb{R}$:ssä.
Oletetaan, että $f(nm) = f(n)f(m)$. Käyttämällä hyväksi osittelakeja $\mathbb{N}$:ssä ja $\mathbb{R}$, induktio-oletusta ja juuri todisettua ominaisuutta $f(n + m) = f(n) + f(m)$, saadaan

$$f(n(m + 1)) = f(nm + n) = f(nm) + f(n) = f(n)f(m) + f(n) \cdot 1 =$$

$$= f(n)(f(m) + 1) = f(n)f(m + 1).$$

Ennen kuin mennään seuraaviin tehtäviin, palautetaan mieleen miten kokonaislukujen yhteenlasku, kertolaku ja järjestysrelaatio määritellään. Olkoot $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ kokonaislukuja, missä $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tällöin määritellään

$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle,$$

$$\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac + bd, ad + bc\rangle.$$

Lisäksi asetetaan $\langle a, b\rangle \leq \langle c, d\rangle$ jos ja vain jos $a + c \leq b + d$.
Luennoilla osoitettiin, että $+$ ja $\cdot$ ovat hyvin määritelyjä (eli eivät riipu esityksestä).

2. a) Osoita, että kokonaislukujen kertolasku on vaihdannainen ja liitännäinen.
b) Osoita, että kokonaisluku $1 = \langle 1, 0\rangle$ on kokonaislukujen kertolaskun neutraalialkio.

Ratkaisu: a) Olkoot $n = \langle a, b\rangle$, $m = \langle c, d\rangle \in \mathbb{Z}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tällöin, koska kertolasku ja yhteenlaksu $\mathbb{N}$:ssä ovat vaihdannaisia,

$$n\cdot m = \langle a, b\rangle\cdot\langle c, d\rangle = \langle ac+bd, ad+bc\rangle = \langle ca+db, cb+da\rangle = \langle c, d\rangle\cdot\langle a, b\rangle = m\cdot n.$$

Olkoot $n = \langle a, b\rangle$, $m = \langle c, d\rangle$, $p = \langle e, f\rangle \in \mathbb{Z}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Määritelmän mukaan

$$(n\cdot m)\cdot p = \langle ac+bd, ad+bc\rangle\cdot\langle e, f\rangle = \langle (ac+bd)e+(ad+bc)f, (ac+bd)f+(ad+bc)e\rangle$$

ja

$$n\cdot(m\cdot p) = \langle a, b\rangle\cdot\langle ce+df, cf+de\rangle = \langle a(ce+df)+b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+df)\rangle.$$

Riittää siis näyttää, että $\mathbb{N}$:ssä pätee

$$(ac+bd)e+(ad+bc)f = a(ce+df)+b(cf+de), \text{ ja}$$

$$(ac+bd)f+(ad+bc)e = a(cf+de)+b(ce+df).$$

Ensimmäinen yhtälö saadaan käyttämällä tuttuja $\mathbb{N}$:n laskutoimitusten $+$ ja $\cdot$ ominaisuuksia - vaihdannaisuuksia, liitännäisyyksiä ja osittelulakia seuraavasti,

$$(ac+bd)e+(ad+bc)f = ace+bde+adf+bcf = (ace+adf)+(bcf+bde) = a(ce+df)+b(cf+de).$$

Toinen yhtälö näytetään samalla tavalla.

b) Suora lasku määritelmästä lähtien - jokaisella $n = \langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}$ pätee

$$n\cdot 1 = \langle a,b\rangle \cdot \langle 1,0\rangle = \langle a\cdot 1+b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1\rangle = \langle a,b\rangle = n,$$

sillä $\mathbb{N}$:ssä $x\cdot 1 = x$ ja $x \cdot 0 = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

3. a) Osoita, että kaikilla $x,y,z \in \mathbb{Z}$ pätevät osittelulait

$$(x+y)z = xz+yz, x(y+z) = xy+xz.$$

b) Osoita kertolaskun supistussäännön; jos $xz = yz$ ja $z \neq 0$, niin $x = y$.

Ratkaisu: a) Olkoot $x = \langle a,b\rangle, y = \langle c,d\rangle, z = \langle e,f\rangle \in \mathbb{Z}, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$. Tällöin suoraan määritelmän perusteella

$$(x+y)z = \langle a+c, b+d\rangle \cdot \langle e,f\rangle = \langle (a+c)e+(b+d)f, (a+c)f+(b+d)e\rangle$$

ja

$$xz+yz = \langle ae+bf, af+be\rangle + \langle ce+df, cf+de\rangle = \langle (ae+bf)+(ce+df), (af+be)+(cf+de)\rangle.$$

Jälleen kerran, käyttämällä tunnetuja $\mathbb{N}$:n laskutoimitusten ominaisuuksia, nähdään, että

$$(a+c)e+(b+d)f = (ae+bf)+(ce+df),$$

$$(a+c)f+(b+d)e = (af+be)+(cf+de).$$

Tämä todistaa ensimmäisen osittelulain $(x+y)z = xz+yz$. Toinen seuraa tästä, koska kertolasku $\mathbb{Z}$:ssä tiedetään jo olevan vaihdannainen, nimittäin

$$x(y+z) = (y+z)x = yx+zx = xy+xz.$$

b) Riittää todistaa niin sanottu "nollansääntö" - jos $xy = 0$ $\mathbb{Z}$:ssä niin $x = 0$ tai $y = 0$. Nimittäin supistussääntö seuraa tästä nollansäännöstä osittelulain avustuksella. Tarkistetaan tätä.
Yhtälö $xz = yz$ on yhtäpitävä yhtälön $xz - yz = xz + (-(yz)) = 0$. Osittelulain nojalla

$$yz + (-y)z = (y + (-y))z = 0 \cdot z = 0,$$

joten yz:n vasta-alkio $-(yz)$ on $(-y)z$ ("merkkisääntö" on siis osittelulain seuraus). Mistä muuten tiedämme, että $0 \cdot z = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{Z}$? Tämäkin on osittelulain seuraus. Nimittäin

$$0z = (0 + 0)z = 0z + 0z.$$

Lisämällä yhtälön molemmille puolelle $-(0z)$ saadaan $0z = 0$.
Näin ollen $xz = yz$ on yhtäpitävä yhtälön $xz + (-y)z = 0$ kanssa. Osittelulain mukaan jälkimmäinen yhtälö on sama asia kuin $(x - y)z = 0$. Jos nollansääntö on voimassa, $x - y = 0$, mikä on sama asia kuin $x = y$ tai $z = 0$. Tästä seuraa supistussääntö.

Näin ollen haluttu supistussääntö seuraa nollansäännöstä. Kääntäen nollasääntö on supistusäännön erikoistapaus arvolla $y = 0$. Näin ollen (renkaassa) supistussääntö on yhtäpitävä nollansäännön kanssa. Nollansääntö on yleensä helpompi tarkistaa, kun siinä esiintyy vain kaksi tuntematonta, supistustussäännössä kolme.

Olkoot $x = \langle a, b \rangle$, $y = \langle c, d \rangle \in \mathbb{Z}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $xz = 0$. Määritelmän mukaan se tarkoittaa sitä, että

$$\langle ac + bd, ad + bc \rangle = \langle 0, 0 \rangle.$$

Kokonaislukujen määritelmän mukaan (alkiot ovat ekvivalenssirelaatioita), tämä tarkoittaa, että

$$ac + bd = (ac + bd) + 0 = 0 + (ac + bd) = ad + bc.$$

Tehtävänä on osoittaa, että $x = 0$ tai $y = 0$. Edellinen ehto on yhtäpitävä ehdon $a = b$ kanssa ja jälkimmäinen - ehdon $c = d$ kanssa.
Luonnollisista luvuista a, b toinen on suurempi tai yhtä suuri kuin toinen. Oletetan esimerkiksi, että $a \geq b$. Tällöin Proposition 76 nojalla on olemassa $k \in \mathbb{N}$, siten, että $a = b + k$. Korvaamalla yllä a lausekkeella $b + k$, saadaan osittelulain nojalla

$$ac + bd = (b + k)c + bd = bc + bd + kc \text{ ja}$$

$$ad + bc = (b + k)d + bc = bc + bd + kd.$$

Saadaan siis

$$bc + bd + kc = bc + bd + kd.$$

Koska luonnollisten lukujen joukossa on voimassa supistussääntö yhteenlaskulle (Propositio 74), tästä seuraa, että $kc = kd$. Toisaalta myös kertolaskulle $\mathbb{N}$:ssä on voimassa supistussääntö (Propositio 75), jonka mukaan tästä seuraa, että joko $k = 0$ tai $c = d$. Jälkimmäisessä tapauksessa $y = 0$. Edellisessä tapauksessa $a = b + k = b$, joten $x = 0$.

4. Osoita, että relaatio $\leq$ kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$,

$$\langle n, m\rangle \leq \langle p, q\rangle \text{ jos ja vain jos } n + q \leq p + m,$$

on hyvin määritelty ja on täysi järjestys joukossa $\mathbb{Z}$.

Ratkaisu: Oletetaan, että

$$\langle n, m\rangle = x = \langle n', m'\rangle,$$

$$\langle p, q\rangle = y = \langle p', q'\rangle.$$

Tällöin $\mathbb{Z}$:n määritelmän mukaan $n + m' = n' + m$ ja $p + q' = p' + q$. Todistaaksemme, että järjestys on hyvin määritelty, oletetaan, että $n + q \leq p + m$ ja osoitetaan, että tällöin välttämättä myös $n' + q' \leq p' + m'$.

Lisätään epäyhtälön $n + q \leq p + m$ molemmille puolelle $m' + p'$. Koska $\mathbb{N}$:ssä tällainen operaatio säilyttää epäyhtälöitä (Propositio 76), joten saadaan

$$(n + q) + (m' + p') \leq (p + m) + (m' + p').$$

Vasemmalla puolella saadaan

$$(n+q)+(m'+p') = (n+m')+(q+p') = (n'+m)+(p+q') = (p+m)+(n'+q').$$

Tuloksena on siis epäyhtälö ($\mathbb{N}$:ssä!)

$$(p + m) + (n' + q') \leq (p + m) + (m' + p'),$$

jossa molemmilla puolella esiintyy sama luku $p + m$. Seuraavaksi luonnollisesti haluamme ”supistaa” sen pois, jolloin päädytään haluttuun tulokseen $n' + q' \leq p' + m'$. Pitää vain perusteella vielä miksi $\mathbb{N}$:ssä epäyhtälön molemmilta puolelta saa supistaa sama yhteenlaskettavaa. Tällainen ominaisuus ei löydy suoraan luentomateriaalista, mutta se on helposti johdattavissa muiden tulosten avulla. Nimitäin oletetaan, että $n + p \leq m + p$ joukossa $\mathbb{N}$. Tällöin Proposition 76 nojalla on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$(n + k) + p = (n + p) + k = m + p.$$

Koska yhteenlaskulle on voimassa supistustussääntö (Propositio 74), tästä saadaan $n + k = m$, mikä Proposition 76 nojalla taas on yhtäpitävä sen kanssa, että $n \leq m$.

Seuraavaksi näytetään, että $\leq$ on täysi järjestys joukossa $\mathbb{Z}$.
(i)$\leq$ on refleksiivinen - jos $x = \langle n, m \rangle \in \mathbb{Z}$, niin triviaalisti $n + m \leq n + m$, joten $x \leq x$
(ii) $\leq$ on antisymmetrinen. Nimittäin olkoot $x = \langle n, m \rangle, y = \langle p, q \rangle$ ja oletetaan, että $x \leq y$ ja $y \leq x$. Tällöin $\mathbb{N}$:ssä pätee $n + q \leq p + m$ ja $p + m \leq n + q$. Koska $\leq$ on antisymmetrinen $\mathbb{N}$:ssä, tästä heti seuraa, että $n + q = m + p$ eli $x = y$.
(iii) $\leq$ on transitiivinen. Nimittäin olkoot $x = \langle n, m \rangle, y = \langle p, q \rangle$, $z = \langle s, t \rangle \in \mathbb{Z}$ ja oletetaan, että $x \leq y$ ja $y \leq z$. Tällöin määritelmän mukaan $n+q \leq p+m$ ja $p+t \leq s+q$. Lisätään ensimmäiseen epäyhtälöön $p + t$, jolloin saadaan

$$(n + q) + (p + t) \leq (p + m) + (p + t).$$

Samalla tavalla lisämäällä toiseen epäyhtälöön lukua $p + m$ saadaan

$$(p + m) + (p + t) \leq (p + m) + (s + q).$$

Vertaamalla näitä, transitiivisuuden ($\mathbb{N}$:ssä) nojalla saadaan

$$(n + q) + (p + t) \leq (p + m) + (s + q).$$

Yllä olemme todistaneet, että N:ssä epäyhtälön molemmilta puolelta saa supistaa yhteisen yhteelaskettavan. Supistamalla $p + q$ molemmilta puolelta päästään epäyhtälöön $n + t \leq m + s$. Tämä juuri tarkoittaa sitä, että $x \leq z$.
(iv) $\leq$ on täysi järjestys. Olkoot $x = \langle n, m \rangle, y = \langle p, q \rangle \in \mathbb{Z}$. Tällöin joko $n + q \leq m + p$ tai $m + p \leq n + q$ (järjestys tiedetään olevan täysi $\mathbb{N}$:ssä) eli joko $x \leq y$ tai $y \leq x$.

5. Osoita, että kaikilla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pätevät seuraavat säännöt.

   (i) Jos $a \leq b$, niin $a + c \leq b + c$.

   (ii) Jos $a \leq b$ ja $c \geq 0$, niin $ac \leq bc$.

Ratkaisu: Olkoot $a = \langle n, m \rangle, b = \langle p, q \rangle$, $c = \langle s, t \rangle \in \mathbb{Z}$ ja oletetaan, että $a \leq b$. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa, että $n + q \leq p + m$ luonnollisten lukujen joukossa.
(i) Väite $a + c \leq b + c$ taas tarkoittaa, että $(n + s) + (q + t) \leq (p+s)+(m+t)$. Tähän päästään kun lisätään epäyhtälöön $n+q \leq p+m$ lukuja s, t $\mathbb{N}$:ssä (mahdollista Proposition 76 nojalla).

(ii) Riittää osoittaa ”merkkisääntö”, joka sanoo, että kahden positiivisen kokonaisluvun $a, b \geq 0$ tulo ab on myös positiivinen. Nimittäin, jos tämä on tiedossa, meitä kiinnostava väite saadaan osittelulain ja edellisen kohdan nojalla. Tarkemmin, oletetaan, että merkkisääntö pätee ja $a \leq b$, $c \geq 0$. Tällöin $(b - a) \geq 0$ ja $c \geq 0$, joten merkkisäännön nojalla $(b - a)c \geq 0$. Osittelulain nojalla tämä on sama asia kuin $bc - ac \geq 0$. Lisäämällä ac epäyhtälön molemmille puolelle (tämä osoitettiin luvalliseksi kohdassa (i) yllä!) saadaan $ac \leq bc$.

Jäljellä siis merkkisäännön osoittaminen. Oletetaaan, että $a = \langle n, m \rangle, b = \langle p, q \rangle \geq 0 = \langle 0, 0 \rangle$. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että $n \geq m$ ja $p \geq q$. Proposition 76 nojalla on olemassa $k, l \in \mathbb{N}$ siten, että $n = m + k$ ja $p = q + l$.
Meidän on osoitettavaa, että

$$ab = \langle np + mq, nq + mp \rangle \geq 0$$

eli $np + mq \geq nq + mp$. Korvataan kaikialla n lausekkeella $m + k$ ja p lausekkella $q + l$. Tällöin

$$np + mq = (m + k)(q + l) + mq = mq + kq + ml + kl + mq \text{ ja}$$

$$nq + mp = (m + k)q + m(q + l) = mq + kq + mq + ml. \text{ ja}$$

Ensimmäinen lauseke on toinen lauseke x plus termi kl. Kaikki tarkastelut $\mathbb{N}$:ssä. Koska $\mathbb{N}$:ssä aina $x + kl \geq x$ (koska $kl \geq 0$ triviaalisti - $\mathbb{N}$:ssä ei ole negatiivisia alkioita), saadaan haluttu väite.

6. a) Osoita, että rationalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen.
b) Osoita, että rationaalilukujen joukossa pätee osittelulaki

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Ratkaisu: Olkoot $x = [m, n], y = [p, q], z = [r, s]$ rationaalilukuja.
Muistutus: yhteenlasku $\mathbb{Q}$:ssä määritely kaavalla

$$x + y = [mq + np, nq],$$

kertolasku - kaavalla

$$xy = [mp, nq].$$

a) Yhteenlaskun vaihdannaisuus:

$$x + y = [mq + np, nq] = [pn + qm, qn] = y + x.$$

Tässä käytämme kokonaislukujen yhteen-ja kertolaskun vaihdannaisuutta, jotka ovat jo tiedossa.

Yhteenlaskun liitännäisyys:

$$(x + y) + z = [mq + np, nq] + [r, s] = [(mq + np)s + (nq)r, (nq)s], \text{ ja}$$
$$x + (y + z) = [m, n] + [ps + qr, qs] = [m(qs) + n(ps + qr), n(qs)].$$

Koska kokonaislukujen laskutoimitukselle tunnetaan jo liitännäisyydet ja osittelulaki, saadaan

$$(mq + np)s + (nq)r = mqs + nps + nqr = m(qs) + n(ps + qr),$$

$$(nq)s = n(qs).$$

Väite seuraa tästä.

b) Määritelmien ja kokonaislukujen laskutoimitusten ominaisuuksien nojalla saadaan

$$(x+y)z = [mq+np, nq][r, s] = [(mq+np)r, (nq)s] = [mqr+npr, nqs], \text{ ja}$$

$$xz+yz = [mr, ns]+[pr, qs] = [(mr)(qs)+(ns)(pr), (nsqs)] = [(mqr+npr)s, (nqs)s].$$

Nyt esitykset eivät ole samoja, mutta toinen saadaan toisesta kertomalla molempia komponenttiä vakiolla s. Rationaalilukujen määritelmän mukaan kaikilla $a, b, c \in \mathbb{Z}, b, c \neq 0$ pätee

$$[ac, bc] = [a, b],$$

sillä $(ac)b = (bc)a$. Näin ollen yllä

$$(x + y)z = [mqr + npr, nqs] = [(mqr + npr)s, (nqs)s] = xz + yz.$$

7*. Olkoon $(X, \leq)$ täysin järjestetty joukko. Osoita, että se ei ole hyvinjärjestetty jos ja vain jos se sisältää osajoukon X', joka on järjestettynä joukkona isomorfinen negatiivisten kokonaislukujen joukon

$$\ldots < -n < \ldots < -2 < -1$$

kanssa.

Ratkaisu: Merkitään negatiivisten kokonaislukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{Z}_-$. Tavallisella järjestyksellään varustettuna tämä joukko ei ole hyvin järjestetty, sillä siinä ei edes ole pienintä alkiota -

$$n - 1 < n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_-$.

Oletetaan, että $(X, \leq)$ on hyvinjärjestetty. Jos sillä olisi osajoukko X' joka olisi järjestettynä joukkona isomorfinen $\mathbb{Z}_-$:n kanssa, niin tällöin X sisältäisi osajoukon, joka ei ole hyvin järjestetty. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä hyvinjärjestetyn joukon osajoukko on aina myös hyvinjärjestetty.
Tai helpommin - X:llä olisi osajoukko jolla ei ole pienintä alkiota, mikä on suoraan vastoin sitä oletusta, että X on hyvinjärjestetty.

Kääntäen oletetaan, että $(X, \leq)$ täysin järjestetty joukko, joka ei ole hyvinjärjestetty. Tällöin erityisesti mikään $x \in X$ ei voi olla sen pienin alkio. Jokaiselle $x \in X$ siis on olemassa $y \in X$ jolle ehto $x \leq y$ EI päde. Tällöin, koska X on täysin järjestetty, $y < x$. Huomaa, juuri tässä tarvitaan oletusta X on täysin järjestetty. Jos se olisi vain osittaisjärjestetty, olisi mahdollinen myös tapaus jonka mukaan y ei ole

vertailtavissa x:n kanssa, eli sekä $x \leq y$, että $y \leq x$ eivät päde.
Nyt voidaan konstruoida X osajoukko X' joka on isomorfinen Z_-:n kanssa induktiolla. Ensin konstruoidaan induktiolla kuvaus $f: \mathbb{N} \to X$. Asetetaan $f(0) = x_0$, missä $x_0 \in X$ on mielivaltainen (huom. X epätyhjä, koska muuten se olisi hyvinjärjestetty). Oletetaan, että $f(n) = x_n \in X$ on jo määritelty. Tällöin valitaan $y \in X$ jolle $y < x_n$ (edellisen kappaleen nojalla sellainen löytyy) ja asetetaan $f(n+1) = y = x_{n+1}$.
Jos nyt määritellään $g: \mathbb{Z}_- \to X$ kaavalla $g(z) = f(-z)$, niin g on injektio ja järjestettyjen joukkojen morfismi, ei isomorfismi $\mathbb{Z}_- \cong g(\mathbb{Z}_-) = X' \subset X$.

Huomautus: Tehtävästä erityisesti seuraa, että jokainen täysin järjestetty äärellinen joukko on välttämättä hyvinjärjestetty. Nimittäi muuten se sisältää äärettömän joukon X'.

8*. Olkoon K järjestetty kunta. Määritellään induktiolla kuvaus $f: \mathbb{N} \to K$, asettamalla

$$f(0) = 0_K,$$

$$f(n+1) = f(n) + 1_K.$$

a) Osoita, että jos $n < m$ joukossa $\mathbb{N}$, niin $f(n) < f(m)$ joukossa K. Päättele tästä, että f on injektio, joten K:n ei-negatiivisten alkioiden joukko on ääretön.
Oletetaan, että K:n ei-negatiivisten alkioiden osajoukko K_+ on hyvinjärjestetty.
b) Osoita, että ei ole olemassa alkiota $x \in K$ jolle $0 < x < 1$ (Ohje: tarkastele x:n potensseja x^n. Edellisestä tehtävästä on hyötyä).
c) Osoita, että $K_+ = f(\mathbb{N}_+)$. (Ohje: vasta-oletuksella oletetaan, että on olemassa $\omega > f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jolloin jono $\omega - f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ tuhoaa hyvinjärjestyksen. a)-kohdan avulla taas näytetään, että $f(n)$:n ja $f(n+1)$:n välillä ei ole mitään alkioita). Näin ollen K_+ on isomorfinen $\mathbb{N}$:n kanssa.

Ratkaisu: a) induktio m:n suhteen. Kun $m = 0$ ei ole alkioita n joille $n < m$ joten ei ole mitään todistettavaa. Oletetaan, että $f(n) < f(m)$ kaikilla $n < m$. Olkoon $n < m+1$ ($\mathbb{N}$:ssä). Tällöin $n < m$ tai $n = m$. Edellisessä tapauksessa induktio-oletuksen avulla saadaan

$$f(n) < f(m) < f(m) + 1 = f(m+1),$$

sillä $1 > 0$ järjestetyssä kunnassa aina (todistetaan kuten $\mathbb{R}$:n tapauksessa). Jos $n = m$, niin

$$f(n) = f(m) < f(m) + 1 = f(m+1).$$

Väite pätee siis joka tapauksessa.
Tästä helposti seuraa, että f on injektio. Nimittäin olkoot $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Tälöin joko $n < m$ tai $m < n$, mistö seuraa, että $f(n) < f(m)$ tai $f(m) < f(n)$, joka tapauksessa ei päde $f(n) = f(m)$.
Näin ollen $f(\mathbb{N}) \subset K$ on yhtämahtava kuin $\mathbb{N}$, erityisesti ääretön. Lisäksi kaikilla $n > 0$ pätee $f(n) > f(0) = 0$ joten $f(\mathbb{N}) \subset K_+$. Näin ollen positiivisten alkioiden joukko sisältää äärettömän osajoukon, joten on itsekin ääretön.

b) Oletetaan, että K:n positiivisten alkioiden joukko on lisäksi hyvin järjestetty. Olkoon $0 < x < 1$. Tällöin järjestettyjen kunnan aksioomista helposti seuraa, että

$$0 < x^2 = x \cdot x < x \cdot 1 = x,$$

$0 < x^3 < x^2 < x$ ja niin edelleen. Yleisesti induktiolla helposti nähdään, että $x^{n+1} < x^n$, joten x:n potenssit x^n muodostavat laskevan ketjun

$$\ldots < x^{n+1} < x_n < \ldots < x^2 < x < 1 = x^0,$$

joka on järjestettynä joukkona isomorfinen $\mathbb{Z}_-$:n kanssa. Edellisen tehtävän nojalla K_+ ei voi olla hyvin järjestetty, mikä on vastoin oletusta. Näin ollen avoin väli $(0, 1)$ on tyhjä K:ssä.

c) Pitää osoittaa, että $K_+ = f(\mathbb{N})$. Sisältyvyys $f(\mathbb{N}) \subset K_+$ on selvä, joten riittää näyttää, että K_+ ei sisällä muita alkioita. Ensin osoitetaan, että K_+:ssä ei ole mitään alkioita ω, jotka olisivat joukon $f(\mathbb{N})$ ylärajoja, eli joille pätisi $f(n) \leq \omega$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. No, jos sellainen ω löytyisi, niin alkiot $x_n = \omega - f(n)$ olisivat K_+:n alkiota, jotka muodostaisivat laskevan jonon

$$\ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < x_0.$$

Tämä on mahdotonta edellisen tehtävän nojalla, sillä K_+ on hyvin järjestetty.
Näin ollen, jos $x \in K_+ \setminus f(\mathbb{N})$, niin x ei ole $f(\mathbb{N})$:n yläraja eli on olemassa $m \in \mathbb{N}$ jolle $f(m) > x$. Valitaan pienin sellainen m, tällöin

$f(m) - 1 < f(m-1) < x$ ($m > 0$ sillä muuten $x < 0$ ei ole joukossa K_+), joten

$$0 < x - f(m-1) < 1,$$

mutta b)-kohdassa on osoitettu, että sellaista alkiota ei voi olla olemassa. Näin ollen x ei voi olla olemassa joten $K_+ = f(\mathbb{N})$ ja väite on todistettu.

Koska f on järjestettyjen joukkojen isomorfismi, $\mathbb{N} \cong K_+$.