**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Reaaliluvut**
**Harjoitus 5**
Ratkaisuehdotuksia.

1. Olkoot $(X, \leq)$ ja $(Y, \leq')$ täysin järjestetyt joukot ja olkoon $x \in X$. Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ on järjestettyjen joukkojen isomorfismi. Osoita, että alkusegmentin $I(x)$ kuva $f(I(x))$ on eräs alkusegmentti $I(y)$. Mikä $Y$:n alkio on tällöin alkio $y$?

   **Ratkaisu:** Koska isomorfismi säilyttää struktuurit täydellisesti, $f(I(x))$:n pitäisi olla alkusegmentti $I(y)$, missä $y = f(x)$. Tarkistetaan tämä formaalisti.
   Olkoon $z \in f(I(x))$. Tällöin $z = f(a)$, missä $a \in X, a < x$ (eli $a \in I(x)$). Koska $f$ säilyttää järjestyksen $\leq$ ja on injektio, $a < x$ implikoi, että
   $$z = f(a) <' f(x) = y.$$
   Näin ollen $z \in I(y)$. Olemme näyttäneet, että $f(I(x)) \subset I(y)$.
   Koska $f$ on isomorfismi, on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1}\colon Y \to X$, joka on myös isomorfismi. Soveltamalla juuri todistettu väite kuvaukseen $f^{-1}$ saadaan
   $$f^{-1}I(y) \subset I(f^{-1}(y)) = I(x).$$
   Ottamalla kuvaus $f$ molemmista puolesta saadaan $I(y) \subset f(I(x))$.
   Koska $f(I(x)) \subset I(y)$ ja $I(y) \subset f(I(x))$, niin $I(y) = f(I(x))$.

   Ennen kuin mennään seuraaviin tehtäviin, palautetaan mieleen luonnollisten lukujen yhteen-ja kertolaskun virallinen määritelmä. Yhteenlasku $n + m$ määritellään induktiolla $m$:n suhteen,
   $$n + 0 = n,$$
   $$n + m^+ = (n + m)^+.$$
   Kertolasku $n \cdot m$ määritellään induktiolla $m$:n suhteen,
   $$n \cdot 0 = 0,$$
   $$n \cdot m^+ = n \cdot m + n.$$
   Luentomateriaalissa on osoitettu suoraan määritelmästä yhteenlaskun liitännäisyys (Propositio 74). Myös osoitettiin, että $n^+ = n + 1$. Näitä tietoja saa tietysti käyttää.

2. a) Osoita induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$n + 1 = 1 + n.$$

b) Osoita, että luonnollisten lukujen yhteenlasku + on vaihdannainen,

$$n + m = m + n, \ n, m \in \mathbb{N}.$$

**Ratkaisu:** a) Ensin tapaus $n = 0$. Suoraan määritelmän nojalla

$$1 + 0 = 1.$$

Toisinpäin $0+1$ pitää laskea jo rekursiivisen määritelmän avulla. Luku 1 on luvun 0 seuraaja, $1 = 0^+$. Näin ollen

$$0 + 1 = 0 + 0^+ = (0 + 0)^+ = 0^+ = 1.$$

Tässä $0 + 0 = 0$ seuraa suoraan määritelmästä. Toinen tapa päättyä yhtälöön $0 + 1 = 0^+ = 1$ on käyttää luennoilla osoitettua tosiasiaa $n+1 = n^+$, josta tämä väite on erikoistapaus, joka vastaa arvoa $n = 0$. Näin ollen

$$0 + 1 = 1 = 1 + 0$$

ja väitteen $n + 1 = 1 + n$ alkuaskel $n = 0$ on osoitettu.

Oletetaan, että väite pätee arvolla $n$ eli $n + 1 = 1 + n$ ja osoitetaan, että

$$n^+ 1 = 1 + n^+.$$

Käyttämällä luennoilla osoitettua yhtälöä $n^+ = n + 1$ tämä väite kirjoitetaan ekvivalenttiin muotoon

$$(n + 1) + 1 = 1 + (n + 1).$$

Käyttämällä induktio-oletusta ja yhteenlaskun liitännäisyyttä (Propositio 74), saadaan

$$(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1),$$

mitä pitikin todistaa.

b) Osoitetaan induktiolla $m$:n suhteen, että

$$n + m = m + n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
Alkuaskel on väite

$$n + 0 = 0 + n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tässä $n+0 = n$ tulee suoraan määritelmästä, mutta $0+n$ pitää laskea erikseen induktiolla. Näin ollen ensin osoitetaan induktiolla $n$:n suhteen, että $0 + n = n$ (huom, "induktio induktion sisällä"!). Kun $n = 0$ yhtälö $0 + 0 = 0$ seuraa suoraan yhteenlaskun määritelmästä. Jos oletetaan, että $0 + n = n$, niin

$$0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+.$$

Näin ollen $0 + n = n = n + 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. "Ulomman" tason induktion (eli väitteen $n + m = m + n$) alkuaskel on todistettu.

Oletetaan, että $n + m = m + n$ ja osoitetaan, että

$$n + m^+ = m^+ + n$$

eli

$$n + (m + 1) = (m + 1) + n.$$

Määritelmän, induktio-oletuksen, liitännäisyyden (propositio 74) ja a)-kohdan avulla saadaan

$$n+(m+1) = (n+m)+1 = (m+n)+1 = m+(n+1) = m+(1+n) = (m+1)+n.$$

Väite todistettu.

**Huomautus:** Huomaa, kuinka joudumme ensin todistamaan "alkutapauksia" $n + 0 = 0 + n$ ja $n + 1 = 1 + n$ induktiolla. Vasta kun ne on osoitettu, voidaan yleisen väitteen todistusta viedä läpi. Tällaisen "induktioon induktion sisällä "joudutaan turvautumaan usein, kun tämäntyyppisiä väitteitä todistetaan.

3. a) Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \cdot 1 = n$.
   b) Osoita (induktiolla) osittelulaki

$$(n + m)k = nk + mk.$$

Tässä tehtävässä saa käyttää vain kertolaskun määritelmää ja yhteenlaskun ominaisuuksia.

**Ratkaisu:** a) $1 = 0^+$, joten suoraan yhteenlaskun määritelmästä seuraa, että

$$n \cdot 1 = n \cdot 0^+ = (n \cdot 0) + n = 0 + n = n.$$

Yhtälö $n \cdot 0 = 0$ tulee suoraan kertolaskun määritelmästä, kun taas $0 + n = n$ on osoitettu edellisessä tehtävässä.

b) Osoitetaan osittelulaki induktiolla $k$:n suhteen. Kun $k = 0$

$$(n + m)k = 0 = 0 + 0 = nk + mk.$$

Oletetaan, että $(n + m)k = nk + mk$. Tällöin

$$(n + m)k^+ = (n + m)k + (n + m) = (nk + mk) + (n + m).$$

Koska yhteenlasku tiedetään jo olevan liitännäinen (propositio 74) ja vaihdannainen (edellinen tehtävä), voidaan ryhmitellä viimeisessä summassa termejä eri tavalla, jolloin saadaan

$$(n + m)k^+ = (nk + n) + (mk + m) = nk^+ + mk^+.$$

Väite osoitettu.

4. Osoita, että luonnollisten lukujen kertolasku on vaihdannainen,

$$nm = mn \text{ kaikilla } n, m \in \mathbb{N}.$$

Edellisessä tehtävässä osoitettua osittelulakia saa käyttää.

**Ratkaisu:** Induktio $m$:m suhteen.
Kun $m = 0$ vasen puoli $n \cdot 0 = 0$ suoraan määritelmästä. Oikea puoli joudutaan tutkimaan taas induktiolla. Osoitetaan siis induktiolla $n$:n suhteen, että $0 \cdot n = 0$. Kun $n = 0$ tämä tunnetaan määritelmästä - $0 \cdot 0 = 0$. Jos oletetaan, että $0 \cdot n = 0$, niin määritelmästä seuraa, että

$$0 \cdot n^+ = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Alkuaskel osoitettu.

Oletetaan, että $nm = mn$. Osoitetaan, että $nm^+ = m^+n$ eli

$$n(m + 1) = (m + 1)n.$$

Määritelmän ja induktio-oletuksen nojalla

$$n(m+1) = nm + n = mn + n.$$

Jos tiedossa olisi yhtälö $1 \cdot n = n$, niin oliis voitu jatkaa edellisen tehtävän osittelulain avulla

$$mn + n = mn + 1n = (m+1)n,$$

mikä on haluttu tulos. Tästä syystä osoitetaan vielä induktiolla $1 \cdot n = n$.
Kun $n = 0$, väite $1 \cdot 0 = 0$ tulee suoraan määritelmästä.
Jos oletetaan, että $1 \cdot n = n$, niin

$$1 \cdot n^+ = 1 \cdot n + 1 = n + 1 = n^+.$$

Todistus on valmis. Huomaa kuinka jälleen kerran jouduttiin erikseen osoittamaan tapauksia $m = 0$ ja $m = 1$ induktiolla.

5. Osoita, että luonnollisten lukujen kertolasku on liitännäinen,

$$(nm)k = n(mk) \text{ kaikilla } n, m, k \in \mathbb{N}.$$

Edellisissä tehtävissä osoitettuja osittelulakia ja kertolaskun vaihdannaisuutta saa käyttää.

**Ratkaisu:** Induktio $k$:n suhteen. Kun $k = 0$ saadaan

$$(nm)k = 0 = n \cdot 0 = n(mk).$$

Oletetaan, että

$$(nm)k = n(mk).$$

Tällöin

$$(nm)k^+ = (nm)k + (nm) = n(mk) + nm = n(mk + m).$$

Tässä käytimme osittelulakia, jonka mukaan $n(a+b) = na + nb$. Tosin tehtävässä 3 tämä laki osoitettiin muodossa $(a+b)n = an + bn$, mutta tarvitsemamme muoto seuraa tästä kertolaskun vaihdannaisuuden takia (teht. 4).
Nyt käytetään vielä kertolaskun määritelmää, jonka mukaan $mk + m = mk^+$, ja saadaan

$$(nm)k^+ = n(mk + m) = n(mk^+).$$

Väite on todistettu.

6. Olkoon $X$ joukko. Osoita, että $X$ on ääretön jos ja vain jos $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

**Ratkaisu:** Oletetaan, että $|\mathbb{N}| \leq |X|$. Määritelmän mukaan tämä ei tarkoita mitään muuta kuin erään injektion $f\colon \mathbb{N} \to X$ olemassaoloa. Jos tämä kuvaus ajatellaan kuvauksena $f\colon \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$, niin se on bijektio, joten, koska $\mathbb{N}$ on ääretön, niin sen kanssa yhtämahtava joukko $f(\mathbb{N})$ on myös ääretön (mieti miksi äärellinen ja ääretön joukko eivät voi olla samaa mahtavuutta). Erityisesti siis $X$ sisältää äärettömän osajoukon. Lemmasta 41 seuraa, että $X$ on myös ääretön.

Oletetaan kääntäen, että $X$ on ääretön ja osoitetaan, että tällöin $|\mathbb{N}| \leq |X|$. Hyvinjärjestyslauseen (Lause 61) nojalla joukossa $X$ voidaan määritellä hyvinjärjestys $\leq$. Verrataan hyvinjärjestettyjä joukkoja $(\mathbb{N}, \leq)$ ja $(X, \leq)$ keskenään. Tässä luonnollisten lukujen joukossa on tavallinen järjestys (joka on osa joukon $\mathbb{N}$ varsinaista määritelmää). Lauseen 65 nojalla tasan yksi seuraavista mahdollisuuksista toteutuu.
(i) Järjestetyt joukot $(\mathbb{N}, \leq)$ ja $(X, \leq)$ ovat isomorfisia.
(ii) On olemassa isomorfismi $I(n) \to X$, missä $I(n)$ on eräs $\mathbb{N}$:n alkusegmentti.
(iii) On olemassa isomorfismi $\mathbb{N} \to I(x)$, missä $I(x)$ on eräs $X$:n alkusegmentti.
Jokainen isomorfismi on erityisesti bijektio. Näin ollen tapauksessa (i) on erityisesti olemassa bijektio $\mathbb{N} \to X$, joten tällöin jopa $|\mathbb{N}| = |X|$. Tapauksessa (iii) on olemassa bijektio $\mathbb{N} \to I(x)$, missä $I(x)$ on $X$:n osajoukko, joten erityisesti on olemassa injektio $f\colon \mathbb{N} \to X$ (sama kuvaus, paitsi että maalijoukko muutetaan). Tämä tarkoittaa, että $|\mathbb{N}| \leq |X|$ suoraan määritelmän nojalla.
Tapaus (ii) on taas mahdoton, sillä se implikoi, että ääretön joukko $X$ on yhtämahtava erään äärellisen joukon $I(n)$ kanssa ($\mathbb{N}$:n jokainen alkusegmentti äärellinen!). Näin ollen joka tapauksessa $|\mathbb{N}| \leq |X|$, mitä pitikin todistaa.

**Huomautus:** Tehtävän tulosta ei pysty todistamaan ilman hyvinjärjestyslausetta ja siis ilman valinta-aksiomaa (joka on yhtäpitävä hyvinjärjestyslauseen kanssa). Jos valinta-aksioomaa ei vaadi, on mahdollista rakentaa sellainen joukko-opillinen maailma, jossa on olemassa (määritelmän 39 mukainen) ääretön joukko $X$, joka ei sisällä numeroituvaa osajoukkoa.

7*. a) Olkoon $X$ joukko. Osoita, että on olemassa hyvinjärjestys $\leq$ joukossa $X$ siten, että jokaiselle alkusegmentille $I(x), x \in X$, pätee $|I(x)| < |X|$.

b) Olkoon $\leq'$ jokin toinen hyvinjärjestys $X$:ssä, joka ei ole isomorfinen järjestyksen $\leq$ kanssa. Osoita, että $(X, \leq)$ on isomorfinen $(X, \leq')$:n erään alkusegmentin $I(x)$ kanssa.

**Ratkaisu:** a) Hyvinjärjestyslauseen 61 nojalla $X$:ssä voidaan määritellä jokin hyvinjärjestys $\preceq$. Tarkastellaan hyvinjärjestetyn joukon $(X, \preceq)$ alkusegmenttejä $I(x), x \in X$. Koska ne ovat $X$:n osajoukkoja, joka tapauksessa pätee $|I(x)| \leq |X|$. Jos kaikille $x \in X$ pätee $|I(x)| < |X|$ olemme valmiit. Muuten osajoukko

$$Y = \{x \in X \mid |I(x)| = |X|\}$$

on epätyhjä, joten (koska hyvinjärjestys!), siinä on olemassa pienin alkio $y$. Merkitään $X' = I(y) \subset X$. Tällöin joukon $Y$ määritelmän mukaan $|X'| = |X|$ määritelmän mukaan, eli on olemassa bijektio $X \to X'$.
$(X', \preceq)$ on itse hyvinjärjestetty joukko. Osoitetaan, että sille pätee haluttu väite. Jokainen $X'$:n alkusegmentti $I(x)$ on myös $X$:n alkusegmentti, jossa lisäksi $x < y$. Koska $y$ on joukon $Y$ pienin alkio, tällöin $x \notin Y$, joten $|I(x)| < |X'| = |X|$. Haluttu ominaisuus siis pätee hyvinjärjestetylle joukolle $X'$. Mutta on olemassa bijektio $X' \to X$. "Siirretään" järjestys $\preceq$ osajoukosta $X'$ joukolle $X$ bijektion $X$ välityksellä, eli määritellään $X$:ssä hyvinjärjestys $\leq$ ehdolla $f(a) \leq f(b)$ jos ja vain jos $a \preceq b$. Helposti nähdään, että $(X, \leq)$ on tällöin hyvinjärjestetty joukko joka on isomorfinen $(X', \preceq)$:n kanssa (ja $f$ on isomorfismi konstruktion perusteella). Koska haluttu ominaisuus pätee $X'$:ssä, väite seuraa myös $X$:lle.

b) Olkoon $\leq$ järjestys $X$:ssä, joka toteuttaa a)-kohdan ehdon ja olkoon $\leq'$ mikä tahansa toinen hyvinjärjestys $X$:ssä. Lauseen 65 nojalla hyvinjärjestetyille joukoille $(X, \leq)$ ja $(X, \leq')$ pätee yksi seuraavista vaihtoehdoista.
(i) On olemassa isomorfismi $(X, \leq)$ ja $(X, \leq')$.
(ii) $(X, \leq)$ on isomorfinen $(X, \leq')$:n erään alkusegmentin $I(x)$ kanssa.
(iii) $(X, \leq')$ on isomorfinen $(X, \leq)$:n erään alkusegmentin $I(x)$ kanssa.
Vaihtoehto (ii) on haluttu johtopäätös, joten näytetään, että vaihtoehdot (i) ja (iii) ovat mahdottomia. Vaihtoehto (i) on ristiriidassa oletuksen kanssa, sillä oletamme, että $\leq'$ on olennaisesti erilainen eli ei-isomorfinen järjestyksen $\leq$ kanssa (Huom, tehtävän alkuperäisessä muotoilussa tämä oli ilmaistu hieman epäselvästi ja harhaanjohtavasti).
Vaihtoehto (iii) taas implikoi, että erityisesti $X$ on samaa mahtavuutta

erään järjestetyn joukon $(X, \leq)$ alkusegmentin kanssa. Mutta tämä on mahdotonta, sillä a)-kohdan nojalla jokainen $(X, \leq)$:n alkusegmentti ei ole yhtämahtava $X$:n kanssa.

Tehtävän opetus - $\leq$ on "minimaalinen" tapa hyvinjärjestää joukko $X$.