Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 4
Ratkaisuhdotuksia

1. Olkoon X äärellinen joukko ja a mikä tahansa alkio. Osoita suoraan äärellisen joukon määritelmästä lähtien, että joukko $X \cup \{a\}$ on myös äärellinen.
   (Havainnollisesti - jos äärelliseen joukkoon lisätään yksi uusi alkio, se pysyy äärellisenä).

   Ratkaisu: Jos $a \in X$, niin $X \cup \{a\} = X$ on äärellinen oletusten nojalla. Voidaan siis olettaa, että $a \notin X$. Olkoon $B \subset X \cup \{a\}$, jolle pätee $|B| = |X \cup \{a\}|$. Riittää osoittaa, että tällöin $B = X \cup \{a\}$.
   Koska $|B| = |X \cup \{a\}|$, on olemassa bijektio $f\colon B \to X \cup \{a\}$. Koska f on bijektio, se on erityisesti surjektio, joten on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = a$.
   Olkoon $g\colon X \cup \{a\} \to X \cup \{a\}$ kuvaus, joka vaihtaa alkiota x ja a keskenään ja jäättää muita alkioita paikalleen. Täsmällisesti

   $$g(y) = \begin{cases} a, & \text{jos } y = x, \\ x, & \text{jos } y = a, \\ y, & \text{muuten }. \end{cases}$$

   Määritelmästä seuraa, että $g \circ g = \mathrm{id}$ (tarkista!), joten g on itsensä käänteiskuvaus, erityisesti g:llä on käänteiskuvaus, joten se on bijektio (Harj 3 teht. 4). Yhdistetty kuvaus $f' = g \circ f\colon B \to X \cup \{a\}$ on kahden bijektion yhdisteenä myös bijektio (Harj 3 teht 6). Lisäksi sillä on ominaisuus $f'(a) = a$. Näin ollen jos f' rajoidutaan osajoukkoon $B' = B \setminus \{a\}$ saadaan bijektio $B' \to X$. Koska $B' \subset X$ ja X on äärellinen, B' ei voi olla X:n osajoukko. Näin ollen $B' = X$, joten $B = B' \cup \{a\} = X \subset \{a\}$, mitä pitikin osoittaa.

2. Osoita edellisen tehtävän avulla, että luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ ei ole suurinta alkiota. $\mathbb{N}$ määritellään kuten Määritelmässä 59.

   Ratkaisu: Määritelmän 59 nojalla $\mathbb{N}$ on ääretön hyvinjärjestetty joukko, jonka jokainen alkusegmentti on äärellinen.
   Tehdään vasta-oletus, olkoon $n \in \mathbb{N}$ sen suurin alkio. Se tarkoittaa sitä, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$ joko $m < n$ tai $m = n$. Toisin sanoen

   $$\mathbb{N} = I(n) \cup \{n\},$$

missä

$$I(n) = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$$

on alkusegmentti. Määritelmän mukaan $I(n)$ on äärellinen joukko. Edellisen tehtävän nojalla $\mathbb{N} = I(n) \cup \{n\}$ on siten myöskin äärellinen. Tämä on ristiriidassa $\mathbb{N}$:n määritelmän mukaan, sillä $\mathbb{N}$ on ääretön.
Näin ollen $\mathbb{N}$:n suurinta alkiota ei voi olla olemassa.

3. Luennoilla on esitetty osittaisjärjestetty joukko $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subset)$ diagrammina

$$\begin{tikzcd}
& x_4 & \\
x_2 \arrow[ur] & & x_3 \arrow[ul] \\
& x_1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}.$$

(kts. materiaalin esimerkkiä 48). *Ketju* on sellainen osittaisjärjestetyn joukon osajoukko, joka on osittaisjärjestettynä joukkona itse täysin järjestetty. Ketju on *maksimaalinen* jos se ei sisälly mihinkään aidosti isompaan ketjuun. Esimerkiksi diagrammissa yllä osajoukko $\{x_1, x_2\}$ on ketju ja $\{x_2, x_3\}$ ei ole. Ketju $\{x_1, x_2\}$ ei ole maksimaalinen, koska se sisältyy isompaan ketjuun $\{x_1, x_2, x_4\}$. Tämä ketju on puolestaan jo maksimaalinen.
a) Esitä kolmen alkion joukon $A = \{a, b, c\}$ potenssijoukko $X = \mathcal{P}(A)$ samanlaisena diagrammina. Tässä tietysti X varustetaan järjestyksellä $\subset$.
b) Anna kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta ei-maksimaalisesta ketjusta X:ssä, joka sisältää alkion $\{a, c\}$ ja kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta X:n osajoukosta, joka sisältää alkion $\{a, c\}$, mutta ei ole ketju.
c) Anna esimerkki maksimaalisesta ketjusta X:stä, joka sisältää alkion $\{a, c\}$. Osaatko antaa toisen esimerkin vain onko tällainen ketju yksikäsitteinen?

Ratkaisu: a) Diagrammi näyttää esimerkiksi seuraavalta,

$$
\begin{tikzcd}
 & \{a,b,c\} & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
.
$$

b) Alla on luettelo kaikista ei-maksimaalisista ketjuista, jotka sisältävät alkion $\{a, c\}$, yksi ketju per rivi. Yksinkertaisuuden vuoksi jätetään uloimmat sulut kirjoittamatta, eli esimerkiksi merkitään $\{a, c\} = \{\{a, c\}\}$.

$$
\begin{gathered}
\{a, c\}, \\
\emptyset, \{a, c\}, \\
\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \\
\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \\
\{a\}, \{a, c\}, \\
\{c\}, \{a, c\}, \\
\{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \\
\{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \\
\emptyset, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \\
\{a, c\}, \{a, b, c\}.
\end{gathered}
$$

c) Esimerkkejä osajoukoista, jotka sisältävät alkion $\{a, b, c\}$, mutta eivät ole ketjuja:

$$
\begin{gathered}
\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \\
\{a, b\}, \{a, c\}, \\
\{b, c\}, \{a, c\}, \\
\{b\}, \{a, c\},
\end{gathered}
$$

$$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}.$$

d) Joukossa on tasan kaksi maksimaalista ketjuja, jotka sisältävät alkion $\{a,b,c\}$. Ne ovat

$$\emptyset,\{a\},\{a,c\},\{a,b,c\} \text{ ja}$$

$$\emptyset,\{c\},\{a,c\},\{a,b,c\}.$$

4. Olkoon $(X,\leq)$ osittaisjärjestetty joukko. Oletetaan, että jokaisella X:n epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio. Osoita, että $(X,\leq)$ on täysin järjestetty.

   Ratkaisu: Olkoot $x,y\in X$ mielivaltaisia. Tällöin osajoukko $A=\{x,y\}\subset X$ on epätyhjä, joten oletuksen mukaan joukossa A on olemassa pienin alkio z.
   Palautetaan mieleen pienimmän alkion määritelmän. Osajoukon $A\subset X$ pienin alkio z on sellainen z jolle
   1) $z\in A$,
   2) kaikilla $w\in A$ pätee $z\leq w$.
   Koska meidän tapauksessa $A=\{x,y\}$, 1) yllä implikoi, että $z=x$ tai $z=y$. Jos $z=x$, niin 2):stä seuraa tällöin, että erityisesti $x\leq y$, koska $y\in A$. Samoin jos $z=y$, niin $y\leq x$. Siis joka tapauksessa $x\leq y$ tai $y\leq x$.

5. a) Olkoon $(X,\leq)$ epätyhjä hyvinjärjestetty joukko, jolla ei ole suurinta alkiota. Osoita, että *seuraajakuvaus* $f\colon X\to X$, $f(x)=x^+$ on injektio, mutta ei ole surjektio.
   b) Osoita (a-kohdan avulla), että epätyhjässä äärellisellä hyvinjärjestetyllä joukolla on aina olemassa suurin alkio.
   (Huom. äärellisyydestä saa olettaa vain määritelmän (määritelmä 39)).

   Ratkaisu: a) Alkuun huomataan, että seuraaja-kuvaus f on määritelty juuri siitä syystä, että X:ssä ei ole suurinta alkiota, joten välitön seuraaja x^+ on määritelty jokaisella $x\in X$.
   f ei ole surjektio, sillä X:n pienin alkio 0 ei voi olla minkään alkion $x\in X$ seuraaja, sillä jos $0=x^+$, niin erityisesti $x<x^+=0$, mikä on mahdotonta, sillä 0 on pienin alkio.
   Osoitetaan, että f on injektio. Olkoot $x,y\in X$ sellaisia, että $x^+=y^+$.

Koska $x < x^+$ seuraajan määritelmän mukaan, $x < y^+$. Seuraajan määritelmästä seuraa myös, että y:n ja y^+:n välissä ei ole mitään alkioita, eli ei ole olemassa $z \in X$ jolle $y < z < y^+$. Jos olisi $y < x$, niin x olisi tällainen alkio, $y < x < y^+$. Koska tämä on mahdotonta, ei voi olla $y < x$, mistä seuraa (koska järjestys on täysi), että $x \leq y$. Symmetrian vuoksi yhtä hyvin pätee $y \leq x$. Näin ollen antisymmetrisyyden nojalla $x = y$ ja injektivisyys osoitettu.

b) Olkoon $(X, \leq)$ epätyhjä äärellinen hyvinjärjestetty joukko. Osoitetaan, että X:llä on suurin alkiota.
Tehdään vasta-oletus - X:llä ei ole suurinta alkiota. Tällöin a)-kohdan nojalla on olemassa seuraaja-kuvaus $f\colon X \to X$, $x \mapsto x^+$, joka on injektio, mutta ei ole surjektio. Tästä seuraa, että f määrittelee bijektion $X \mapsto f(X) = X'$, missä X' on X:n aito osajoukko. Näin ollen $|X'| = |X|$ jollakin aidolla osajokolla $X' \subset X$. Tämä on mahdotonta, sillä X on äärellinen.

Huomautus: Luentomateriaalissa yllä todistettu tulos sovelletaan sen osoittamiseksi, että jokainen nollasta eroava luonnollinen luku n on jonkun luonnollisen luvun m välitön seuraaja, $n = m^+$. Tämä ominaisuus on oleellinen $\mathbb{N}$:n algebralliset ominaisuuksien todistamiseen näkökulmasta ja erottaa $\mathbb{N}$ muista äärettömistä hyvinjärjestyistä joukoista (joissa on aina olemassa alkio, joka ei ole muiden alkioiden välitön seuraaja).

6. Olkoot $(A, \leq)$ ja $(B, \leq')$ osittaisjärjestettyjä joukkoja ja oletetaan, että joukot A ja B ovat erillisiä eli $A \cap B = \emptyset$. Määritellään yhdisteessä $A \cup B$ relaatio $\preceq$ vaatimalla, että $x \preceq y$ jos ja vain jos yksi seuraavista ehdoista pätee
(i) $x, y \in A$ ja $x \leq y$,
(ii) $x, y \in B$ ja $x \leq' y$,
(iii) $x \in A$ ja $y \in B$.
Toisin sanoen A:ssä ja B:ssä pidetään alkuperäisiä järjestyksiä ja lisäksi laitetaan jokainen A:n alkio edeltämään jokaista B:n alkiota.
a) Osoita, että $(A \cup B, \preceq)$ on todellakin osittaisjärjestetty joukko.
b) Oletetaan, että $(A, \leq)$ ja $(B, \leq')$ ovat molemmat täysin järjestettyjä. Osoita, että tällöin myös $(A \cup B, \preceq)$ on täysin järjestetty.
c) Oletetaan, että $(A, \leq)$ ja $(B, \leq')$ ovat molemmat hyvinjärjestettyjä. Osoita, että tällöin myös $(A \cup B, \preceq)$ on hyvinjärjestetty.

Ratkaisu: Alkuun huomataan, että jos $x \in B$ ja $y \in A$ niin tilanne $x \preceq y$ on mahdoton. Tämä seuraa suoraan relaation määritelmästä.
a) **Refleksivisyys:** Olkoon $x \in A \cup B$. Jos $x \in A$, niin $x \leq x$, jos $x \in B$, niin $x \leq' x$. Joka tapauksessa $x \preceq x$.
Antisymmetrisyys: Oletetaan, että $x, y \in A \cup B$ sellaisia, että $x \preceq y$ ja $y \preceq x$. Jos $x \in A$ ja $y \in B$, niin ehto $y \preceq x$ on mahdoton. Samoin jos $x \in B$ ja $y \in A$, niin $x \preceq y$ on mahdoton. Näin ollen joko $x, y \in A$ tai $x, y \in B$. Edellisessä tapauksessa $x \leq y$ ja $y \leq x$ joukossa A, joten $x = y$. Jälkimmäisessä päädytään samaan johtopäätökseen.
Transitivisuus: Oletetaan, että $x \preceq y$ ja $y \preceq z$, missä $x, y\, z \in A \cup B$. On osoitettavaa, että $x \preceq z$.
Tarkastellaan erilaisia tapauksia. Jos $y \in A$, niin myös $x \in A$ ja siis $x \leq y$. Jos $z \in B$, niin $x \preceq z$ määritelmän mukaan. Jos taas $z \in A$, niin $x \leq y$ ja $y \leq z$ joukossa A, joten $x \leq z$.. Erityisesti $x \preceq z$.
Seuraavaksi tutkitaan tapausta $y \in B$. Tällöin myös $z \in B$. Jos $x \in A$, niin $x \preceq z$ järjestyksen määritelmän nojalla. Jos taas $x \in B$, niin joukossa B pätee $x \leq' y$, $y \leq' z$, joten $x \leq' z$ joukossa B. Erityisesti $x \preceq z$.

b) Osoitettaan, että $(A \cup B, \preceq)$ on täysin järjestetty jos A ja B ovat. Olkoot $x, y \in A \cup B$ mielivaltaisia. Jos $x \in A$ ja $y \in B$, niin $x \preceq y$. Jos $x \in B$ ja $y \in A$, niin $y \preceq x$.
Jos $x, y \in A$ molemmat, niin $x \leq y$ tai $y \leq x$, koska $\leq$ on täysi järjestys. Erityisesti $x \preceq y$ tai $y \preceq x$. Samaan johtopäätökseen päädytään, jos $x, y \in B$.

c) Olkoon $C \subset A \cup B$ epätyhjä osajoukko. On osoitettavaa, että C:ssä on pienin alkio.
Tarkastellaan joukkoa $D = C \cap A \subset A$. Jos tämä joukko on epätyhjä, niin siinä on järjestyksen $\leq$ suhteen pienin alkio x joukossa A (Koska $(A, \leq)$ on hyvinjärjestetty). Osoitetaan, että x on C:n pienin alkio relaation $\preceq$ suhteen. Olkoon $y \in C$ mielivaltainen. Jos $y \in A$, niin $y \in D$, joten $x \leq y$, sillä x on D:n pienin alkio. Näin ollen erityisesti $x \preceq y$. Jos taas $y \in B$, niin $x \preceq y$ suoraan määritelmän nojalla, sillä $x \in A$. Väite on osoitettu.
Jäljellä on tapaus, jossa $D = C \cap A = \emptyset$. Tällöin $C \subset B$. Koska $(B, \leq')$ on hyvinjärjestetty, joukossa $C \subset B$ on olemassa pienin alkio x relaation $\leq'$ suhteen. Koska $C \subset B$, tämä alkio on myös C:n pienin alkio relaation $\preceq$ suhteen.