**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Reaaliluvut**
**Harjoitus 3**
Ratkaisuehdotuksia.

1. Osoita todeksi seuraavia joukko-oppilisia kaavoja kaikille joukoille $A, B, C$.

   (a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

   (b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

   (c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

   Päätekö c)-kohdan yhtälö jos symboli $\cap$ korvataan symbolilla $\cup$:llä? Miksi/miksei?

   **Ratkaisu:** a) Olkoon $x \in (A \cup B) \cap C$. Leikkauksen määritelmän mukaan $x \in A \cup B$ ja $x \in C$. Koska $x \in A \cup B$, yhdisteen määritelmän nojalla joko $x \in A$ tai $x \in B$ pätee.
   1) Tarkastellaan tapaus $x \in A$. Tällöin $x \in A$, lisäksi yllä huomattiin jo, että $x \in C$. Näin ollen $x \in A$ ja $x \in C$. Leikkauksen määritelmän nojalla $x \in A \cap C$. Erityisesti $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   2) Toinen tapaus on $x \in B$. Tällöin, koska edelleenkin joka tapauksessa $x \in C$, pätee $x \in B \cap C$. Tästä taas seuraa, että $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   Olemme näyttäneet, että

   $$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

   S

   Seuraavaksi ositetaan toinen suunta. Olkoon $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Tällöin joko $x \in A \cap C$ tai $x \in B \cap C$.
   1) Oletetaan, että $x \in A \cap C$. Tällöin $x \in A$ ja $x \in C$. Koska $x \in A$, erityisesti myös $x \in A \cup B$. Näin ollen $x \in (A \cup B) \cap C$.
   2) Oletetaan, että $x \in B \cap C$. Tällöin $x \in B$ ja $x \in C$. Koska $x \in B$, erityisesti myös $x \in A \cup B$. Näin ollen $x \in (A \cup B) \cap C$.
   Olemme näyttäneet, että

   $$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C.$$

   b) Oletetaan, että $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Tällöin $x \in A \setminus B$ ja $x \notin C$. Koska $x \in A \setminus B$, pätee $x \in A$ ja $x \notin B$. Kootaan kaikki mitä tiedämme $x$:stä tässä vaiheessa yhteen. Tiedämme, että $x \in A$, $x \notin B$ ja $x \notin C$.
   Osoitetaan, että $x \notin B \cup C$. Tehdään vasta-oletus - $x \in B \cup C$. Mutta tällöin $x \in B$ tai $x \in C$. Molemmat vaihtoehdot ovat kuitenkin

ristiririidassa oletusten kanssa - tiedämme jo, että $x \notin B$ ja $x \notin C$. Näin ollen $x \notin B \cup C$. Koska $x \in A$ ja samalla $x \notin B \cup C$, niin pätee $x \in A \setminus (B \cup C)$.
Kääntäen olkoon $x \in A \setminus (B \cup C)$. Tällöin $x \in A$ ja $x \notin B \cup C$. Samalla tavalla kun edellä, nähdään, että jälkimmäisestä tapauksesta seuraa, että $x \notin B$ ja $x \notin C$. Koska $x \in A$ ja $x \notin B$, pätee $x \in A \cap B$. Lisäksi tiedetään, että $x \notin C$. Näin ollen $x \in (A \setminus B) \setminus C$.

c) Olkoon $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Tällöin $C \subset A \cap B$. Koska leikkauksen $A \cap B$ jokainen alkio on määritelmän mukaan myös $A$:n ja $B$:n alkio, pätee $C \subset A$ ja $C \subset B$. Näin ollen $C \in \mathcal{P}(A)$ ja $C \in \mathcal{P}(B)$. Leikkauksen määritelmän nojalla $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Kääntäen oletetaan, että $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Tällöin $C \subset A$ ja $C \subset B$. Näin ollen $C \subset A \cap B$, joten $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

Jos leikkaus korvataan edellisessä väitteessä yhdisteellä, yhtäsuuruus ei enää päde. On totta, että

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B),$$

sillä jos $C \subset A$ tai $C \subset B$, niin erityisesti $C \subset A \cup B$. Kääntäinen sisältyvyys ei kuitenkaan ole yleisesti voimassa. Itse asiassa se on voimassa jos ja vain jos toinen joukoista $A$, $B$ on toisen osajoukko. Nimittäin, oletetaan, että

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Tällöin erityisesti $A \cup B \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, joten joko $A \cup B \subset A$ tai $A \cup B \subset B$. Edellisessä tapauksessa $B \subset A$, jälkimmäisessä $A \subset B$. Kääntäen helposti nähdään, että jos $B \subset A$ tai $A \subset B$, niin pätee (tarkista!)

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Konkrettinen esimerkki saadaan kun otetaan mitkä tahansa kaksi joukkoa $A$ ja $B$, joista kumpikin ei ole toisen osajoukko. Esimerkiksi olkoot $a, b$ eri alkiot ja $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Tällöin $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mutta $A \cup B \notin \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

2. Olkoon $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ suljettu yksikköväli. Tutki onko seuraava relaatio $R \subset X \times X$ kuvaus $X \to X$.

(a) $R = \{(x,y) \in X \times X \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$,

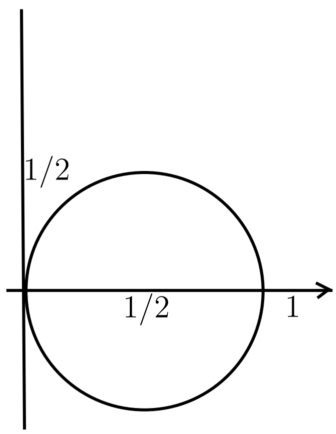
(b) $R = \{(x,y) \in X \times X \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$.

**Ratkaisu:** Aloitetaan epäformaalilla tarkastelulla, jossa käytämme hyväksi jo koulussa opittua tietoa. Molemmissa kohdissa kannattaa ensin piirtää kuvan tilanteesta. Tunnetusti tasossa molemmat yhtälöt

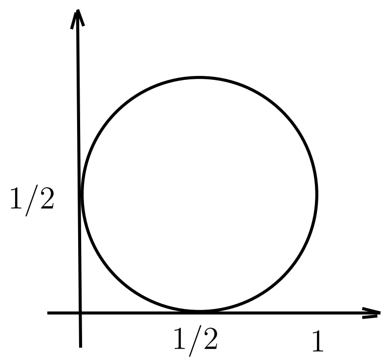
$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

kuvaavat ympyröitä. Ensimmäinen yhtälön on $(\frac{1}{2}, 0)$-keskeinen ympyrä, jonka säde on $1/2$.
Toinen yhtälö kuvaa ympyrää, jonka keski piste on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ja säde on $1/2$.




(a)




(b)

Palautetaan mieleen, että tilanne tarkastellaan vain sellaisille $(x, y)$, joissa sekä $x$, että $y$ kuuluvat yksikkövälille $[0, 1]$. Näin ollen kohdassa (a) relaation "kuvaaja" (eli ne pisteet $(x, y$ jotka kuuluvat relaatioon) on geometrisesti puoliympyrä. "Kuvasta nähdään", että jokaista $x \in [0, 1]$ vastaa tasan yksi $y \in [0, 1]$, jolle $(x, y) \in R$, joten relaatio ON kuvaus. Kohdass (b) taas koko ympyrä mahtuu neliöön $[0, 1] \times [0, 1]$ ja esimerkiksi pistettä $x = 1/2$ vastaa kaksi $y$:n arvoa - 0 ja 1. Näin ollen relaatio EI OLE kuvaus.

Nyt kun vastaus selvisi, voidaan miettiä miten se voidaan perustella "formaalisti",suoraan määritelmistä, vetoamatta kuviin ja aikaisemmin opittuun ympyrien ominaisuuksiin.

(a) Meidän pitää osoittaa, etti $R$ on kuvaus, eli jokaisella $x \in [0,1]$ on olemassa TASAN YKSI $y \in [0,1]$, jolle $(x,y) \in R$ eli

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Kiinitetään $x \in [0,1]$ ja olkoon $y \in [01]$ sellainen, että $(x,y) \in R$. Tällöin

$$y^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$$

eli

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2},$$

tietysti edellyttäen, että juurettavaa on ei-negatiivinen reaaliluku, eli siitä voi ottaa (reaalinen) neliöjuuri. Tutkitaan asiaa. Koska $x \in [0,1]$, $x - 1/2 \in [-1/2, 1/2$, mistä taas seuraa, että $(x - 1/2)^2$ on välillä $[0, 1/4]$. Näin ollen $\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ saa arvoja välillä $[0, 1/4]$. Tässä käytimme hyväksi kaikenlaisia reaalilukujen algebralisesia ominaisuuksia, mutta niitä on tarvittaessa helppo perustella reaalilukujen aksioomista lähtien. Toinen tapa päättyä samiin tuloksiin on ensin sieventää

$$\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 = x - x^2 = x(1-x).$$

Joka tapauksessa tämä lauseke saa erityisesti arvoja väliltä $[0,1]$, joten on olemassa tasan yksi $y \in [0,1]$ jolle

$$y^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2.$$

Tämä on juuri sitä, mitä pitikin todistaa. Tässä joudutaan nojautumaan siihen tietoon, että jokaisella reaaliluvulla väliltä $[0,1]$ on olemassa ykskäsitteinen reaaliluku välillä $[0,1]$ (tietysti on olemassa toinenkin neliöjuuri, negatiivinen, mutta se ei ole tarkasteltavalla välillä).

(b) Nyt kun haluamme perustella sen, että relaatio ei olekaan kuvaus, riittää löytää vasta-esimerkki eli sellainen $x \in [0,1]$, jolle on olemassa kaksi eri $y \in [0,1]$ siten, että $(x,y) \in R$. Esimerkiksi kun $x = 1/2$, sekä $(1/2, 0)$, että $(1/2, 1)$ ovat relaatiossa $R$. Tämä nähdään suoraan laskemalla.

3. Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ on bijektio.
(a) Osoita, että relaatio $R \subset Y \times X$

$$R = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

on eräs kuvaus $g\colon Y \to X$.
(b) Osoita, että $g$ on itse asiassa $f$:n käänteiskuvaus.

**Ratkaisu:** (a) Olkoon $y \in Y$ mielivaltainen. Koska $f$ on surjektio, on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$. Näin ollen $(y, x) = (f(x), x) \in R$. Erityisesti jokaisella $y \in Y$ on olemassa $x \in X$, jolle $(y, x) \in R$, eli $\operatorname{dom} R = Y$.

Osoitetaan, että jos $y \in Y, x_1, x_2 \in X$ siten, että $(y, x_1), (y, x_2) \in R$, niin itse asiassa $x_1 = x_2$. Relaation määritelmästä seuraa tällöin, että $f(x_1) = y = f(x_2)$. Koska $f$ on injektio, $x - 1 = x_2$.

(b) On osoitettavaa, että kaikilla $x \in X, y \in Y$ pätee

$$g(f(x)) = x, f(g(y)) = y.$$

Olkoon $y = f(x)$. Tällöin $(y, x) \in R = g$, eli $g(y) = x$. Tämä todistaa kaavan $g(f(x)) = x$.
Olkoon $x = g(y)$. Tällöin $(y, x) \in R = g$, eli $y = f(x)$. Toisin sanoen $f(g(y)) = y$.

4. Olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ kuvauksia. Osoita, että
(a) Jos $g \circ f$ on injektio, niin $f$ on injektio.
(b) Jos $g \circ f$ on surjektio, niin $g$ on surjektio.
Päättele tästä seuraavaa.
Olkoon $f$ kuvaus, jolla on olemassa käänteiskuvaus. Tällöin $f$ on bijektio.

**Ratkaisu:** (a) Olkoot $x, x' \in X$ sellaiset, että $f(x) = f(x')$. Tällöin erityisesti

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x').$$

Mutta oletusten mukaan $g \circ f$ on injektio, joten $x = x'$, mitä pitikin todistaa.

(b) Olkoon $z \in Z$. Koska $g \circ f \colon X \to Z$ on surjektio, on olemassa $x \in X$ jolle $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Mutta tällöin $y = f(x)$ on sellainen, että $g(y) = g(f(x)) = z$. Näin ollen $g$ on surjektio.

Olkoon $f$ sellainen kuvaus, jolla on olemassa käänteiskuvaus $g \colon Y \to X$. Tällöin

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

Identtinen kuvaus $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ on aina bijektio, erityisesti injektio. Koska $g \circ f = \mathrm{id}_X$ on injektio, (a)-kohdasta seuraa, että $f$ on injektio. Vastavaasti, koska $\mathrm{id}_Y$ on surjektio, kohdasta (b) ja yhtälöstä $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ seuraa, että $f$ on surjektio.
Koska $f$ on sekä injektio, että surjektio, se on bijektio.

5. Jos $a$ ja $b$ ovat reaalilukuja ja $a < b$, määritellään avoin väli $]a, b[$ ja suljettu väli $[a, b]$ joukkoina

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

a) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b$. Keksi jokin bijektio $[a, b] \to [a + c, b + c]$, joka kuvaa päätepisteet $a$ ja $b$ päätepisteille $a + c, b + c$. Miten tästä seuraa, että vastaavilla avoimilla väleillä $]a, b[$ ja $]a + c, b + c[$ on sama mahtavuus?
b) Osoita, että $f \colon ]0, 1[\to]0, a[$, $f(x) = ax$ on hyvin määritelty bijektio.
c) Päättele, että kaikki $\mathbb{R}$:n rajoitetut välit (sekä avoimet, että suljetut) ovat yhtämahtavia, esimerkiksi $|]0, 1[| = |[0, 1]|$.

**Ratkaisu:** a) Määritellään $f \colon [a, b] \to [a + c, b + c]$ kaavalla $f(x) = x+c$. Helposti nähdään, että $f$ on hyvin määritelty (eli todellakin kuvaa $[a, b]$:n alkiot välille $[a+c, b+c]$). Lisäksi kuvaus $g \colon [a+c, b+c] \to [a, b]$, $g(x) = x-c$ (joka on hyvin määritelty, tarkista) on $f$:n käänteiskuvaus, sillä

$$f(g(x)) = (x - c) + c = x,$$

$$g(f(x)) = (x + c) - c = x.$$

Näin ollen $f$ on bijektio. Lisäksi $f(a) = a + c$, $f(b) = b + c$. Tästä seuraa, että jos $f$ rajoidutaan välille $]a, b[$ ja tarkastellaan kuvauksena $f \colon ]a, b[\to]a + c, b + c[$, niin saadaan hyvinmääritelty bijektio, joten myös vastaavilla avoimilla väleillä $]a, b[$ ja $]a+c, b+c[$ on sama mahtavuus.

b) Ensinnäkin $f$ on hyvinmääritelty, sillä kaikilla $x \in [0,1]$ pätee $0 \leq ax \leq a$.
Määritellään $g\colon [0,a] \to [0,1]$ kaavalla $g(x) = x/a$. Tällöin $g$ on hyvinmääritelty (nähdään samalla tavalla kuin edellä $f$:lle) ja on $f$:n käänteiskuvaus, sillä

$$g(f(x)) = g(ax) = (ax)/a = x,$$

$$f(g(x)) = f(x/a) = a(x/a) = x.$$

c) Olkoot $a < b$. Tällöin a)-kohdan nojalla $[a, b]$ on yhtämahtava kuin $[0, b-a]$, joka puolestaan b)-kohdan nojalla yhtämahtava kuin $[0,1]$. Samalla tavalla nähdään, että jokainen avoin väli $]a, b[$ on yhtämahtava kuin avoin väli $]0,1[$. Riittää siis näyttää, että $|]0,1[| = |[0,1]|$.
Tämä nähdään helposti Cantor–Bernstein–Schroederin Lauseen avulla. Nimittäin $|]0,1[| \leq |[0,1]|$, koska $]0,1[ \subset [0,1]$. Toisaalta $[0,1] \subset ]-1,2[$ ja avoin väli $]-1,2[$ on yhtä mahtava välin $]0,1[$ kanssa, kuten edellä todettiin jo. Näin ollen myös $|[0,1]| \leq |]0,1[|$.

Väite on mahdollista osoittaa myös vetoamatta Cantor–Bernstein–Schroederin Lauseseen, konstruoimalla konkreettinen bijektio $f\colon ]0,1[ \to [0,1]$. Tämä voi tehdä esimerkiksi seuraavasti. Aloitetaan valitsemalla väliltä $]0,1[$ kaksi erillistä numeroituvaa osajoukkoa $A$ ja $B$, esimerkiksi

$$A = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\},$$

$$B = \{\frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}.$$

Seuraavaksi määritellään kuvaus $f\colon ]0,1[ \to [0,1]$ asettamalla

$$f(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$f(\frac{1}{3}) = 0,$$

$$f(\frac{1}{3^n}) = \frac{1}{3^{n-1}}, n \geq 2,$$

ja $f(x) = x$ muuten. Helposti nähdään, että kyseessä on bijektio.
Ajatus on siinä, että numeroituva joukko on sellainen joukko $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$,

joka on indeksoitu luonnollisilla luvuilla $1, 2, \ldots, n, \ldots$, joten siinä voi aina siirtää indeksi yksikkö eteenpäin eli kuvata $a_n \mapsto a_{n-1}$ kun $n \geq 2$, jolloin vapautunut ensimmäinen alkio $a_1$ voidaan käyttää "paikkantamaan" alkioita 0 ja 1, jotka "puuttuvat" avoimelta väliltä.

6. Olkoot $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ kuvauksia. Osoita, että
(a) jos $f$ ja $g$ ovat injektioita, myös $g \circ f$ on injektio,
(b) jos $f$ ja $g$ ovat surjektioita, myös $g \circ f$ on surjektio,
(c) jos $f$ ja $g$ ovat bijektioita, myös $g \circ f$ on bijektio.

**Ratkaisu:** (a) Olkoot $a, b \in X$, $a \neq b$. Koska $f$ on injektio, tästä seuraa, että $f(a) \neq f(b)$. Koska $g$ on injektio, tästä puolestaan seuraa, että $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \neq g(f(b)) = (g \circ f)(b)$. Näin ollen $g \circ f$ on injektio.

(b) Olkoon $z \in Z$. Koska $g$ on surjektio, on olemassa $y \in Y$ siten, että $g(x) = y$. Koska $f$ on surjektio, niin on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$. Näin ollen $(g \circ f)(x) = z$, joten $g \circ f$ on surjektio.