Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 2
Ratkaisuehdotus
Aleksandr Pasharin

1. Osoita, että reaalilukujen ”pienempi kuin” relaatio $<$ toteuttaa seuraavia ehtoja.

D'(i) $x < x$ ei päde millään $x \in \mathbb{R}$.

D'(ii) Olkoot x, y reaalilukuja. Tällöin täsmälleen yksi seuraavista väitteistä pätee:
$$x < y \text{ tai } x = y \text{ tai } y < x.$$

D'(iii) Olkoot x, y, z reaalilukuja. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$.

E'(i) Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tällöin jos $x < y$, niin $x + z < y + z$.

E'(ii) Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tällöin jos $x < y$ ja $0 < z$, niin $x \cdot z < y \cdot z$.

Ratkaisu:
Palautetaan ensin mieleen, että $x < y$ pätee jos ja vain jos $x \leq y$ ja $x \neq y$.
Aloitetaan osoittamalla D'(ii) todeksi. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin aksiooman D(iv) nojalla joko $x \leq y$ tai $y \leq x$. Oletetaan, että $x \leq y$. Tällöin relaation $<$ määritelmästä seuraa, että $x < y$ tai $x = y$. Jos taas $y \leq x$ samalla tavalla pätee $y < x$ tai $x = y$. Joka tapauksessa ehdoista $x < y, x = y, y < x$ ainakin yksi toteutuu.
Osoitetaan, että näistä ehdoista kaksi eivät voi olla voimassa samaan aikaan. Ehdot $x < y$ ja $x = y$ eivät voi olla voimassa relaation $<$ määritelmän nojalla. Samasta syystä $y < x$ ja $x = y$ ovat toistensa poissulkevia. Viimein, oletetaan, että $x < y$ ja $y < x$. Tästä seuraa, että $x \neq y$, mutta erityisesti myös $x \leq y$ ja $y \leq x$. Aksioomasta D(ii) seuraa tällöin, että $x = y$. Koska $x = y$ ja $x \neq y$ eivät voi olla samaan aikaan voimassa, saadaan mahdottomuus.
D'(ii) on osoitettu. Ominaisuus D'(i) seuraa D'(ii) triviaalisti - koska $x = x$ pätee jo, $x < x$ ei voi päteä. Toisaalta se, että $x < x$ ei päde seuraa myös suoraan relaation $<$ määritelmästä.
Seuraavaksi osoitetaan D'(iii). Oletetaan, että $x < y$ ja $y < z$. Tällöin erityisesti $x \leq y$ ja $y \leq z$, joten aksiooman D(iii) nojalla $x \leq z$. Osoitetaan vielä, että $x \neq z$. Mutta jos olisi $x = z$, tällöin olisi $x < y$ ja $y < x$ samaan aikaan voimassa, mikä todistettiin jo D'(ii):n kohdalla

mahdottomaksi. Näin ollen $x \leq z$ ja $x \neq z$, eli $x < z$.
Osoitetaan E'(i). Oletetaan, että $x < y$ ja $z \in \mathbb{R}$. Tällöin erityisesti $x \leq y$, joten aksiooman E(i) nojalla $x+z \leq y+z$. Jos olisi $x+z = y+z$, tästä seuraisi (lisäämällä yhtälön molempiin puoliin vasta-alkio $-z$), että $x = y$, mikä on vastoin oletusta. Näin ollen $x + z < y + z$.
Osoitetaan E'(ii). Oletetaan, että $x < y$ ja $0 < z$. Tällöin erityisesti $x \leq y$ ja $0 \leq z$, joten $xz \leq yz$. Osoitetaan, että $xz \neq yz$. Oletetaan, että $xz = yz$. Tällöin, kertomalla yhtälön molemmat puolet käänteisalkiolla z^{-1}, joka on olemassa, koska $0 < z$, joten erityisesti $z \neq 0$, saadaan $x = y$, mikä on vastoin oletusta $x < y$. Näin ollen $xz < yz$.
Huomautus: Pannaan erityisesti merkille, että tehtävässä käytimme hyväksi vain reaalilukujen aksioomia emmekä käyttäneet kertakaan täydellisyysaksioomaa F. Näin ollen, vaikka tehtävässä pyydettiin osoittamaan väitteet $\mathbb{R}$:ssä, näemme heti, että ne pätevät (samoilla todistuksilla) myös missä tahansa järjestelmässä $(K, +, \cdot, \leq)$ joka toteuttaa kaikki reaalilukujen aksioomat paitsi ehkä täydellisyysaksioomaa F, toisin sanoen missä tahansa järjestetyssä kunnassa. Tästä huomiosta on meille hyötyä seuraavissa tehtävissä.

2. Olkoon $(K, +, \cdot, \leq)$ järjestetty kunta, eli systeemi, joka toteuttaa kaikki reaalilukujen aksioomat paitsi ehkä täydellisyysaksioomaa F.
Olkoon P kunnan K positiivisten alkioiden osajoukko,

$$P = \{x \in K \mid x > 0\}.$$

Tässä relaatio $>$ määritellään luonnollisesti samalla tavalla kuin reaalilukujen tapauksessa eli $x > y$ tarkoittaa, että $y \leq x$ ja $y \neq x$.
Osoita, että

   (i) P on suljettu yhteen- ja kertolaskun suhteen, eli kaikilla $x, y \in P$ pätee $x + y, xy \in P$,

   (ii) kaikilla $x \in K$ tasan yksi seuraavista ehdoista toteutuu

$$x \in P \text{ tai } x = 0 \text{ tai } -x \in P.$$

Ratkaisu:
Niin kuin edellisen tehtävän ratkaisun yhteydessä huomattiin, tehtävän 1 tulokset pätevät missä tahansa järjestetyssä kunnassa, joten voimme käyttää niitä tämän tehtävän ratkaisussa.
Olkoon $(K, +, \cdot, \leq)$ järjestetty kunta. Olkoot $x, y \in P$ eli $x, y > 0$. Tällöin aksiooman E'(i) nojalla

$$x + y > 0 + 0 = 0$$

ja aksiooman E'(ii) nojalla voimme kertoa epäyhtälö $x > 0$ ei-negatiivisella luvulla y, jolloin saadaan

$$xy > 0 \cdot y = 0.$$

Huomaa, että $0 + 0 = 0$ pätee jokaisessa kunnassa nolla-alkion määritelmän perusteella. Yhtälö $0 \cdot y$ on taas osittelulain seuraus (todistus sama kuin reaaliluvuille).
Ominaisuus (i) on todistettu.
Ominaisuus (ii) seuraa edellisen tehtävän aksioomasta D'(ii). Nimittäin ominaisuudesta D'(ii) seuraa, että jokaisella $x \in K$ pätee täsmälleen yksi seuraavista ehdoista - $x > 0$, $x = 0$ tai $x < 0$. Olemme valmiit, kun osoitamme vielä, että ominaisuus $x < 0$ on yhtäpitävä ominaisuuden $-x > 0$ kanssa.
Jos $x < 0$, lisäämällä yhtälön molemmille puolille saadaan $0 = x + (-x) < 0 + (-x) = -x$. Näin ollen, jos $x < 0$, niin $-x > 0$. Toinen suunta osoitetaan samalla tavalla.

3. Oletetaan, että $(K, +, \cdot)$ on kunta. Oletetaan, että on olemassa K:n osajoukko P joka toteuttaa seuraavia ehtoja.

   (i) P on suljettu yhteen- ja kertolaskun suhteen, eli kaikilla $x, y \in P$ pätee $x + y, xy \in P$.

   (ii) Kaikilla $x \in K$ tasan yksi seuraavista ehdoista toteutuu

   $$x \in P \text{ tai } x = 0 \text{ tai } -x \in P.$$

   Määritellään K:ssä relaatio $\leq$ ehdolla

   $$x \leq y \text{ jos ja vain jos } y - x \in P \text{ tai } x = y.$$

   Osoita, että $(K, +, \cdot, \leq)$ on järjestetty kunta ja P on tällöin sen positiivisten alkioiden osajoukko.

   Ratkaisu:
   On tarkistettavaa, että relaatio $\leq$ toteuttaa aksioomia D(i)-D(iv), E(i)-E(ii) reaalilukujen määritelmästä.
   D(i). Jokaisella $x \in K$ pätee $x = x$, joten $x \leq y$.
   D(ii). Oletetaan, että $x, y \in K$ ja $x \leq y$ ja $y \leq x$. On osoitettavaa, että $x = y$. Tehdään vasta-oletus - $x \neq y$. Tällöin relaation $\leq$ määritelmästä seuraa, että $y - x \in P$ ja $x - y \in P$. Mutta $x - y = -(y - x)$ ja ominaisuuden (ii) nojalla $y - x \in P$ ja $-(y - x) \in P$ eivät voi päteä

samaan aikaan. Saatu ristiriita osoittaa sen, että on oltava $x = y$.
D(iii). Oletetaan, että $x, y, z \in K$ ja $x \leq y$, $y \leq z$. Jos $x = y$ tai $y = z$, tästä seuraa suoraan, että $x \leq z$. Muuten $y - x \in P$ ja $z - y \in P$. Ehdon (i) nojalla tällöin myös

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in P.$$

Erityisesti $x \leq z$.
D(iv). Olkoot $x, y \in K$ ja tarkastellaan alkiota $z = y - x$. Ominaisuuden (ii) nojalla pätee $z \in P, z = 0$ tai $-z = x - y \in P$. Jos $z \in P$, tästä seuraa suoraan että $y \leq x$. Jos $z = 0$, $x = y$, joten taas $x \leq y$. Jos taas $-z \in P$, niin $x - y \in P$, joten suoraan relaation $\leq$ määritelmästä seuraa, että $y \leq x$. Joka tapauksessa siis pätee joko $x \leq y$ tai $y \leq x$.
E(i). Olkoot $x, y, z \in K$ ja $x \leq y$. Tällöin $y - x \in P$ tai $x = y$. Jälkimmäisessä tapauksessa $x + z = y + z$, joten erityisesti $x + z \leq y + z$. Muuten $y - x \in P$, joten

$$(y + z) - (x + z) = y - x \in P,$$

mistä seuraa suoraan, että $x + z \leq y + z$.
E(ii) Olkoot $x, y, z \in K$ ja oletetaan, että $x \leq y$, $0 \leq z$. Jos $x = y$, erityisesti $xz = yz$, joten $xz \leq yz$. Jos $z = 0$, niin $xz = 0 = yz$, kuten kunnassa aina, joten erityisesti $xz \leq yz$. Muuten $z \in P$ ja $y - x \in P$. Ehdosta (ii) ja osittelulaista, tällöin seuraa, että

$$yz - xz = (y - x)z \in P,$$

joten $xz \leq yz$, mitä pitikin todistaa.
Ehto $x > 0$ on yhtäpitävä sen kanssa, että ($x \in P$ tai $x = 0$) ja $x \neq 0$. Tällöin ei voi olla $x = 0$, joten $x > 0$ on sama asia kuin $x \in P$. Toisin sanoen P on tasan positiivisten alkioiden osajoukko.
Tästä ja edellisestä tehtävä seuraa, että ekvivalentti tapa "koodata" järjestetyn kunnan käsitettä on määritellä se kuntana, jossa on lisäksi kiinnitetty osajoukko P, joka toteuttaa ehtoja (i) ja (ii). Tällöin formaalisti järjestetty kunta on $(K, +, \cdot, P)$.

4. Olkoon K kunta, jossa luvulla -1 on neliöjuuri, toisin sanoen sellainen alkio $x \in K$ jolle $x^2 = -1$. Osoita, että ei ole olemassa tapa tehdä K:stä järjestetty kunta.
(Vihje: jos tällainen tapa olisi olemassa, olisiko -1 positiivinen vain negatiivinen? Entäs 1?).

Ratkaisu:
Yksi tapa olisi huomata, että järjestetyssä kunnassa jokainen neliö x^2 on ei-negatiivinen. Tämä todistetaan samalla tavalla kuin reaalilukujen tapauksessa. Tästä erityisesti seuraa, että järjestetyssä kunnassa $1 = 1^2 > 0$ aina. Tällöin ei voi olla myös $-1 > 0$.
Erityisesti kompleksilukujen kunta ei voi järjestää niin, että järjestys olisi "sopusoinnissa" laskutoimitusten $+$ ja $\cdot$ kanssa. Tämä on "hinta", jonka joudutaan maksamaan siitä ominaisuudesta, että kompleksilukujen kunnassa mielivaltaisella (ei-vakio) polynomilla on ainakin yksi juuri. Kuntia, jotka toteuttavat tällaisen ominaisuuden sanotaan *algebrallisesti suljetuiksi*. Algebran näkökulmasta tämä on erittäin hyödyllinen ominaisuus ja ehkä juuri se tekee kompleksiluvuista niin käyttökelvollisen systeemin. Voidaan osoittaa, että jokainen kunta voidaan "laajentaa" algebralliseksi suljetuksi. Esimerkiksi $\mathbb{R}$:lle tällainen laajennus on juuri kompleksilukujen joukko. Kuten tästä tehtävästä seuraa, tällaisessa laajentamisessa aina joutuu "hukkamaan" järjestyksen matkan varrella.

5. Olkoon A reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko. Määritellään osajoukko $-A$ kaavalla
$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$
Toisin sanoen $-A$ koostuu A:n vasta-alkioista.
a) Oletetaan, että A on alhaalta rajoitettu ja epätyhjä. Osoita, että tällöin $-A$ on ylhäältä rajoitettu ja
$$-\sup(-A) = \inf A.$$
b) Osoita a)-kohda avulla, että jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla osajoukolla on olemassa suurin alaraja eli infimum.

Ratkaisu:
Olkoon x mielivaltainen A:n alaraja (joka on olemassa oletuksen nojalla). Tällöin $x \le a$ jokaisella $a \in A$. Tästä epäyhtälöstä seuraa, että $-x \ge -a$ kaikilla $a \in A$, joten $-x$ on joukon $-A$ yläraja.
Erityisesti $-A$ on ylhäältä rajoitettu $\mathbb{R}$:n osajoukko. Aksiooman F nojalla on olemassa $y = \sup(-A)$.
Osoitetaan, että $-y$ toteuttaa A:n infimumin määritelmän. Tästä erityisesti seuraa, että A:llä on infimum, eli b)-kohta.
Ensinnäkin $-a \le y$ jokaisella $a \in A$, sillä y on $-A$:n yläraja. Tästä seuraa, että $a \ge -y$ jokaisella $a \in A$, joten $-y$ on erityisesti A:n alaraja.

Osoitetaan, että se on suurin A:n alaraja. Olkoon x mielivaltainen A:n alaraja. Kuten yllä osoitimme jo, $-x$ on tällöin $-A$:n yläraja. Koska y on pienin $-A$:n yläraja, pätee $-x \geq y$. Tästä seuraa, että

$$x \leq -y.$$

Näin ollen jokainen A:n alaraja on pienempi tai yhtä suuri kuin $-y$. Näin ollen $-y$ on suurin A:n alaraja. Toisin sanoen

$$-\sup(-A) = -y = \inf A,$$

mitä pitikin todistaa. Tästä seuraa b)-kohta, kuten selitimme jo yllä.

6. Olkoon A ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä $\mathbb{R}$:n osajoukko ja olkoon x reaaliluku. Osoita, että $x = \sup A$ jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa.

   (i) $a \leq x$ jokaisella $a \in A$ ja

   (ii) jokaisella positiivisella reaaliluvulla $\varepsilon > 0$ on olemassa $b \in A$ siten, että $b > x - \varepsilon$.

   Formuloi samannäköinen karakterisaatio infimumille.

   Ratkaisu:
   Ehto (i) tarkoittaa täsmälleen sitä, että x on joukon A yläraja. Näin ollen riittää osoittaa, että ehto (ii) on yhtäpitävä sen kanssa, että mikään A:n yläraja ei ole aidosti pienempi kuin x.
   Oletetaan ehto (ii) ja osoitetaan, että mikään $y < x$ ei ole A:n yläraja. Olkoon $\varepsilon = x - y$. Tällöin $\varepsilon > 0$ ja $y = x - \varepsilon$. Koska ehdon (ii) nojalla on olemassa $b \in A$ siten, että $b > x - \varepsilon = y$, y ei voi olla A:n yläraja.
   Oletetaan kääntäen, että mikään $y < x$ ei ole A:n yläraja. Osoitetaan, että ehto (ii) pätee tällöin. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $y = x - \varepsilon < x$, joten oletuksemme mukaan y ei ole A:n yläraja. Näin ollen on olemassa ainakin yksi $b \in A$ jolle $y = x - \varepsilon < b$.
   Infimum karakterisoidaan samalla tavalla seuraavasti. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $A \subset \mathbb{R}$ osajoukko. Tällöin $x = \inf A$ jos ja vai jos se toteuttaa seuraavia ehtoja.

   (i) $a \geq x$ jokaisella $a \in A$ ja

   (ii) jokaisella positiivisella reaaliluvulla $\varepsilon > 0$ on olemassa $b \in A$ siten, että $b < x + \varepsilon$.

Todistus on täysin analoginen vastaavan supremum-karakterisaation kanssa.