Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaaliluvut
Harjoitus 1
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Pasharin

1. Määritellään reaaliluvut $2, 3, 4$ kaavoilla

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1.$$

Osoita tarkasti määritelmistä lähtien, että $2 + 2 = 4$. Mitä aksioomia joudut käyttämään?

Ratkaisu: Koska määritelmän mukaan $2 = 1 + 1$, voimme kirjoittaa

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1).$$

Yhteenlaskun liitännäisyyden (aksiooma A(ii)) nojalla

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Väite on todistettu. Reaalilukujen aksiomeista tarvittiin vain aksioomaa A(iii). Erityisesti tästä seuraa, että väite pätee missä tahansa systeemissä, jossa on määritelty liitännäinen yhteenlasku ja alkio 1. Esimerkiksi $2 + 2 = 4$ jokaisessa kunnassa.

2. Osoita, että reaaliluvut toteuttavat seuraavia kaavoja.

$$-(-x) = x, \text{ kaikilla reaaliluvuilla } x$$

$$a(b - c) = ab - ac, \text{ kaikilla reaaliluvuilla } a, b, c$$
$$a(-b) = (-a)b = -(ab), \text{ kaikilla reaaliluvuilla } a, b$$
$$(-a)(-b) = ab, \text{ kaikilla reaaliluvuilla } a, b$$

Ratkaisu: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Aksioomin A(ii) (yhteenlaskun vaihdannaisuus) ja vasta-alkio määritelmän nojalla x:n vasta-alkio $-x$ on sellainen reaaliluku y, jolle pätevät yhtälöt

$$x + y = y + x = 0.$$

Lisäksi y on ainoa alkio, joka toteuttaa näitä ominaisuuksia (Lemma 3).

Tämä havainto on voimassa kaikille reaaliluvuille, joten erityisesti se on tosi myös x:n vasta-alkiolle $y = -x$ (joka on olemassa ja reaaliluku Aksiooman A(iv) nojalla). Mutta yhtälöistä

$$x + y = y + x = 0$$

nähdään, että x toteuttaa vasta-alkion määritelmän y:lle. Näin ollen $-y = x$ eli $-(-x) = x$.
Seuraavaksi osoitetaan, että $a(-b) = -(ab)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$. Riittää näyttää, että reaaliluku $(-a)b$ toteuttaa reaaliluvun ab vasta-alkion määritelmän. Osittelulaista (aksiooma C), vasta-alkion määritelmästä ja Lemmasta 4 seuraa, että

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0.$$

Näin ollen $-(ab) = (-a)b$. Tästä ja kertolaskun vaihdannaisuudesta seuraa, että

$$a(-b) = (-b)a = -(ba) = -(ab).$$

Kun sovelletaan todistettuja tuloksia tuloon $(-a)(-b)$ saadaan lisäksi, että

$$(-a)(-b) = -(a(-b) = -(-(ab)) = ab.$$

Jäljellä on kaavan

$$a(b - c) = ab - ac$$

todistus. Tämä seuraa osittelulaista (aksiooma C), vähennyslaskun määritelmästä ja edellä todistetuista tuloksista seuraavasti,

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$$

3. Osoita, että seuraavat kaavat ovat voimassa kaikille reaaliluvuille a, b, c, d, $a, b, d \neq 0$.

$$\frac{ab}{ad} = \frac{b}{d},$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Ratkaisu: Ensimmäinen kaava todistetaan jakolaskun määritelmän, Lemman 4, kertolaskun liitännäisyyden (aksiooma B(ii)), kertolaskun vaihdannaisuuden (aksiooma B(i)) ja luvun 1 määritelmän avulla,

$$\frac{ab}{ad} = (ab)(ad)^{-1} = (ab)(a^{-1}d^{-1}) = b(aa^{-1})d^{-1} = b1d^{-1} = bd^{-1} = \frac{b}{d}.$$

Tätä ominaisuutta hyväksi käyttämällä saadaan

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = fracadbd + \frac{bc}{bd} = (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1}.$$

Osittelulain (aksiooma C) nojalla, voidaan ottaa $(bd)^{-1}$ yhteisenä tekijänä, jolloin saadaan

$$(ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad + bc}{bd},$$

mitä pitikin todistaa.
Edelleen, jakolaskun määritelmän ja kertolaskun ominaisuuksien (vaihdannaisuus, liitännäisyys ja Lemma 4) nojalla

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

Kaava $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ todistetaan osoittamalla, että $\frac{b}{a}$ toteuttaa alkion $\frac{a}{b}$ käänteisalkion määritelmän. Edellisen kaavan ja kertolaskun vaihdannaisuuden nojalla

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = (ab)(ab)^{-1} = 1.$$

Viimeisessä yhtälössä vedotaan suoraan käänteisalkion määritelmän.

4. Olkoon $X = \{a, b\}$ kahden alkion alkio. Määritellään X:ssä laskutoimituksia $+$ ja $\cdot$ kaavoilla

$$a + a = b + b = a, a + b = b + a = b,$$

$$a \cdot a = a \cdot b = b \cdot a = a, b \cdot b = b.$$

a) Osoita, että systeemi $(X, +, \cdot)$ toteuttaa aksioomia A(i)-(iv), B(i)-(iv) ja C reaalilukujen määritelmästä. Mikä alkio on nolla-alkio 0 ja mikä alkio on 1?
b) Näytä, että X:ssä $x = -x$ jokaisella alkiolla x, erityisesti $1 = -1$.
c) Määritellään alkiot $2, 3, 4$ joukossa X samoilla kaavoilla kuin tehtävässä 1,

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1.$$

Selvitä kumpi alkioista a, b on alkio 2, alkio 3, alkio 4. Päätekö yhtälö $2 + 2 = 4$ joukossa X?

Ratkaisu: Laskutoimitusten vaihdannaisuus (aksioomat A(i) ja B(i)) seuraa suoraan niiden määritelmistä. Alkio a toteuttaa nolla-alkion 0 määritelmän ja alkio b toteuttaa alkion 1 määritelmän. Koska $a + a = a = 0 = b+b$, jokainen alkio on itseensä vasta-alkio, $-x = x$. Erityisesti $1 = -1$. Alkion b (ainoa nollasta eroava alkio) käänteisalkio on b.
Liitännäisyydet ja osittelulaki ovat työläimpiä - on paljon tarkasteltavia tapauksia. Osoitetaan ensin yhteenlaskun liitännäisyys. Olkoot $x, y, z \in X$. Jos $x = a$, niin koska a on nolla-alkio, saadaan

$$(a + y) + z = y + z = a + (y + z).$$

Samalla tavalla, hyödyntämällä sitä, että $a = 0$, helposti nähdään, että liitännäisyys on voimassa kun $y = a$ tai kun $z = a$. Jäljellä tapaus $(b+b)+b = b+(b+b)$ nähdään joka suoraan laskemalla tai vetoamalla vaihdannaisuuteen.
Kertolaskun liitännäisyys voi tarkistaa samalla tavalla hyödyntämällä 1:n ominaisuutta $x \cdot 1 = x$.
Jäljellä on osittelulaki,

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Jos $x = 0$,

$$(x + y)z = yz = xz + yz,$$

sillä $0u = 0$ kaikilla $u \in X$ (nähdään suoraan kertolaskun määritelmästä, $0 = a$). Samalla tavalla (tai vetoamalla vaihdannaisuuteen) hoidetaan tapaus $y = 0$. Jos $z = 0$, kaava on $0 = 0 + 0$, pätee taas. Jäljellä tapaus $(1 + 1)1 = 1 \cdot +1 \cdot 1$, joka nähdään todeksi suoalla laskulla.
Joukossa X pätee $2 = b + b = a$, $3 = 2 + 1 = a + b = b$, $4 = 3 + 1 = b + b = a$. Yhtälö $2 + 2 = 4$ pätee muodossa $a + a = a$. Toisaalta voidaan päätellä, että se pätee laskemattakin mitään. Nimittäin tehtävässä 1 olemme näyttäneet, että yhtälö $2 + 2 = 4$ seuraa aksioomasta A(ii) joten on voimassa esimerkiksi jokaisessa kunnassa.

Huomautus: Kurssin ”Algebra I” käyneelle (tai muuten abstraktia algebraa lukeneelle) X on tuttu nimellä ”kokonaisluvut modulo 2”. Tällä tavalla tulkittuna se merkitään symbolilla $\mathbb{Z}_2$. Tällainen olio konstruoidaan lähtemällä kokonaisluvuista ja samastamalla kaikki parilliset luvut keskenään yhdeksi alkioksi ja kaikki parittomat luvut toiseksi alkioksi. Tällöin operaatioiden ominaisuudet seuraavat samanlaisista kokonaislukujen yhteen- ja kertolaskun ominaisuuksista, jotka ikään kuin

tunnetaan.
Tietysti tällä kurssilla ei kokonaislukujen ominaisuuksiin voida vielä vedota virallisesti - niitä emme vielä ”tunne”.

Huomautus 2: Hauska tapa osoittaa X:n yhteenlaskun liitännäisyys on huomata, että yhteenlasku X:n on määritelty ihan samalla kuin reaalilukujen 1 ja -1 kertolasku, jos a tulkitaan reaalilukuna 1 ja b tulkitaan reaalilukuna -1. Tällöin X:n yhteenlaksun liitännäisyys seuraa reaalilukujen kertolaskun vastaavasta ominaisuudesta.
Näin yleensä jonkun operaation liitännäisyys (tai joku muu ”hankala” ominaisuus) osoitetaankin käytännössä - yritetään löytää joku ennestään tuttu systeemi, joka algebrallisesti ”näyttää samalta” josta tiedetään, että se toteuttaa saman ominaisuuden.
Kertolaskun liitännäisyys X:ssä voi puolestaan osoittaa huomaamalla, että se näyttää samalta kuin reaalilukujen 0 ja 1 muodostaman systeemin kertolaskusta.
Tämä ratkaisutapa ei ole formaalisesta näkökulmasta vielä ”laillinen ” - emme vielä osoittaneet, että reaalilukuja ominaisuuksine on olemassa.