7 Konstruktion jälkeen - analyysi ja yleistyksiä

.

Olemme onnistuneet kurssin varsinaisessa tavoitteessa - olemme onnistaneet reaalilukujen olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä. Kurssin viimeisessä osassa suoritetaan pienimuotoinen katsaus reaalianalyysin alkeisiin ja reaalilukujen yleistyksiin.

7.1 Analyysin alkeita

Jonojen suppenemisesta.
Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono kunnassa $\mathbb{R}$ ja olkoon $x \in \mathbb{R}$. Palautetaan mieleen, että jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppeneminen kohti x tarkoittaa sitä, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ja sanotaan x jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raja-arvoksi. Jos jonolla on raja-arvo, se on yksikäsitteinen. Jonoa, jolla on raja-arvo sanotaan suppenevaksi.

Jonon suppenemiseen ja raja-arvoon vaikuttavat vain sen jäsenet ”tarpeeksi isoilla indeksillä ”. Toisin sanoen jos kahdelle jonolle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pätee $x_n = y_n$ kaikilla $n \leq n_0$, jollakin $n_0 \in \mathbb{N}$, niin toinen jono suppenee jos ja vain jos toinen suppenee. Lisäksi tällöin niillä on sama raja-arvo. Erityisesti tästä seuraa, että voimme puhua jonon (x_n) suppenemisesta, vaikka jonon jäsenet olisivat määriteltyjä ei kaikilla $n \in \mathbb{N}$ vaan alkaen jostakin luvusta n_0. Tällöin voidaan asettaa arvoja x_n kun $n < n_0$ mielivaltaisesti (esimerkiksi $x_n = 0$). Tätä sopimusta käytetään (yleensä jopa mainitsematta) esimerkiksi kun puhutaan jonosta $x_n = \frac{1}{n}$. Tämähän ei formaalisti ole määritelty arvolla $n = 0$, mutta tällä seikalla ei ole mitään merkitystä kun tutkitaan raja-arvoja.

Raja-arvot ”säilyvät” $\mathbb{R}$:n laskutoimituksissa ja järjestyksessä.

Lemma 126. *Olkoot $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jonoja $\mathbb{R}$:ssä ja oletetaan, että*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ja}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio.
Tällöin jonot $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ myös suppenevat ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = x - y,$$

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = ax,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y.$$

Jos $x_n \leq y_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin myös $x \leq y$.
Lisäksi, jos $y \neq 0$, niin $y_n \neq 0$ ainakin alkaen jostakin indeksistä n_0 (eli kaikilla $n \geq n_0$) ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Vakiojonon $x_n = a$ raja-arvo on a.

Todistus. Sivutetaan (tunnettua Analyysin peruskursseilta). □

Kaikilla jonoilla ei tietenkään ole raja-arvoa. Esimerkiksi jono $x_n = n$ ei suppene $\mathbb{R}$:ssä. Samoin jono $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, jolle siis $x_{2k} = 0$ ja $x_{2k+1} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, ei suppene. Kuitenkin näiden kahden jonon käyttäytyminen on erilaista. Jono $x_n = n$ "kasvaa kohti äärettömyyttä" ja jos siitä poimitaan mikä tahansa "osajono" (tarkka määritelmä esitetään kohta), niin tämä osajonokin kasvaa äärettömyyden asti eikä suppene. Jos taas jonosta $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ poimitaan vain parillisia indeksiä vastaavia arvot tai vain parittomia indeksiä vastaavia arvoja, saadaan jonoja, jotka suppenee - toinen kohti pistettä 0 ja toinen kohti pistettä 1. Osoittautuu, että jokaisesta $\mathbb{R}$:n rajoitetusta jonosta voidaan poimia osajono, joka ei suppene. Tämä **kompaktisuus-ominaisuus** on tärkeimpiä $\mathbb{R}$:n ominaisuuksia (joukossa $\mathbb{Q}$ se ei päde).

Ennen kuin mennään eteenpäin, esitetään virallinen määritelmä osajonolle.
Kuvausta $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sanotaan *aidosti kasvavaksi* jos se säilyttää aidon järjestyksen $<$, eli jos kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ pätee $\phi(n) < \phi(m)$. Tällainen kuvaus on vältämättä injektio (miksi?), mutta on surjektio vain triviaalissa tapauksessa $\phi = \text{id}$. Yleisesti aidosti kasvava kuvaus "poimii $\mathbb{N}$:stä kasvavan osajonon", jonka jäsenet välttämättä kasvavat "rajatta" eli niillä ei ole yläraja $\mathbb{N}$:ssä. Tämä nähdään seuraavasti. Kuvaus ϕ on määritelmänsä mukaan

itse asiassa *isomorfismi* täysin järjestettyjen joukkojen $\mathbb{N}$ ja $A = f(\mathbb{N})$ välillä. Erityisesti $A \subset \mathbb{N}$ on ääretön. Jos sillä olisi yläraja $n \in \mathbb{N}$, niin A olisi äärellisen joukon $I(n)$ (alkusegmentti) osajoukko, eli olisi itse äärellinen, mikä on mahdotonta.
Kääntäen olkoon $A \subset \mathbb{N}$ ääretön joukko. Tavallinen $\mathbb{N}$:n järjestys $\leq$ määrittelee myös järjestyksen osajoukossa A, joten $(A, \leq)$ on hyvinjärjestetty joukko (hyvinjärjestetyn joukon osajoukko on aina itse hyvinjärjestetty). Lauseen 65 nojalla joko $(N, \leq)$ ja $(A, \leq)$ ovat isomorfisia, tai toinen näistä joukoista on isomorfinen toisen joukon alkusegmentin kanssa. Mutta jokainen $\mathbb{N}$:n alkusegmentti on äärellinen, joten myös jokainen A:n alkusegmentti on äärellinen (se on aina vastaavan $\mathbb{N}$:n alkusegmentin osajoukko). Koska sekä A, että $\mathbb{N}$ ovat äärettömiä, nämä tapaukset ovat siis mahdottomia, joten ainoa jäljellä oleva mahdollisuus on se, että on olemassa isomorfismi $\phi\colon (\mathbb{N}, \leq) \to (A, \leq)$. Lisäksi saman Lauseen 65 nojalla tällainen kuvaus on yksikäsitteinen. Saadaan siis seuraava (intuitiivisesti uskottava) tulos.

Lemma 127. *Olkoon $A \subset \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa aidosti kasvava $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jolle $\phi(\mathbb{N}) = A$ jos ja vain jos A on ääretön. Lisäksi jos ϕ on olemassa, se on yksikäsitteinen.*

Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono $\mathbb{R}$:ssä ja olkoon. Jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *osajono* on jono, joka on muotoa $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ jollakin aidosti kasvavalla $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Tällöin yleensä merkitään $\phi(k) = n_k$, jolloin

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

ja osajonon jäsentä $x_{\phi(k)}$ merkitään yksinkertaisesti x_{n_k}:llä.

Esimerkki 128. *Kuvaus $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\phi(k) = 2k$ on aidosti kasvava kuvaus joka "poimii parillisia lukuja". Jonon $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ osajono $(x_{\phi(k)})$ on vakiojono $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, joka suppenee kohti nollaa.*
Samoin jos valitaan $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\phi(k) = 2k + 1$, niin vastaava osajono on vakiojono $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, joka suppenee kohti lukua 1.
Huomataan siis, että vaikka alkuperäinen jono ei suppene, sillä on suppenevia osajonoja.

Jono (x_n) joukossa $\mathbb{R}$ on *kasvava*, jos $x_n \leq x_m$ aina kun $n \leq m$. Vähenevälle jonolle vastaavasti pätee $x_n \geq x_m$ kun $n \leq m$. Jono joka on kasvava tai vähenevä on *monotoninen*.

Propositio 129. *(1) Jokainen $\mathbb{R}$:n suppeneva jono on rajoitettu (sekä ylhäältä, että alhaalta).*

(2) Monotoninen jono suppenee jos ja vain jos se on rajoitettu.

(3) Jokaisella rajoitetulla $\mathbb{R}$:n jonolla on suppeneva osajono.

(4) $\mathbb{R}$ on Cauchy-täydellinen. Toisin sanoen jono suppenee $\mathbb{R}$:ssä jos ja vain jos se on Cauchyn jono.

Todistus. (1) Jokainen suppeneva osajono on erityisesti Cauchyn jono, joten osoitetaan yleisesti, että Cauchy jono (x_n) on rajoitettu. Tällöin on olemassa $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - x_m| < 1$ kun $n, m \geq n_1$. Erityisesti $|x_n - x_{n_1}| < 1$ kun $n \geq n_1$. Kolmioepäyhtälösyä tällöin seuraa, että

$$|x_n| \leq 1 + |x_{n_1}|$$

kaikilla $n \geq n_1$. Olkoon

$$M = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n-1}|\}$$

(täysin järjestetyssä äärellisessä joukossa on aina suurin alkio, tarkista!). Tällöin $-M \leq x_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Osoitetaan, että rajoitettu kasvava jono c suppenee. Olkoon $x = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Supremumin määritelmän nojalla on olemassa n_ε siten, että

$$x_{n_\varepsilon} \leq x < x_{n_\varepsilon} + \varepsilon.$$

Koska jono on kasvava, kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ pätee

$$x_n \leq x < x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \leq x_n + \varepsilon.$$

Erityisesti kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ pätee

$$|x_n - x| = x - x_n < \varepsilon,$$

joten jono suppenee kohti x.
Vähenevän jonon joten. tapauksessa samalla tavalla nähdään, että jono suppenee kohti lukua $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(3) Olkoon (x_n) rajoitettu jono $\mathbb{R}$:ssä. Jos on olemassa $n' \in \mathbb{N}$ siten, että jono $(x_{n'}, x_{n'+1}, \ldots, x_m, \ldots)$ (eli jono (x_n) alkaen indeksistä n') on kasvava, niin jono x_n suppenee edellisen kohdan nojalla. Jos tällaista n' ei ole, se tarkoittaa sitä, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $m(n) = m > n$ siten, että $x_m < x_n$. Tämän avulla voidaan induktiolla konstruoida osajono (x_{n_k}), joka on jonona vähenevä. Nimittäin asetetaan $x_{n_0} = x_0$ ja jos x_{n_k} on valittu valitaan $x_{n_{k+1}} = x_m$ missä $m > n$ ja $x_m < x_{n_k}$. Tällöin osajono on vähenevä,

joten suppenee edellisen kohdan nojalla.

(4) Olkoon (x_n) Cauchyn jono. Olemme osoittaneet yllä jo sen, että se on rajoitettu, joten edellisen kohdan nojalla on olemassa osajono (x_{n_k}) joka suppenee kohti $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että (x_n) suppenee kohti x. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono on Cauchyn ja osajono (x_{n_k}) suppenee, on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ja $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ kun } n, m \geq n_\varepsilon, \text{ ja}$$

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 \text{ kaikilla } k \geq k\varepsilon.$$

Olkoon $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin, osajonon määritelmän mukaan, on olemassa myös $k \in \mathbb{N}$ siten, että $k \geq k\varepsilon$ ja $n_k \geq n_\varepsilon$. Näin ollen

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Väite on osoitettu. □

Esimerkkejä 130. *1) "Perus" raja-arvo tulos, jonka avulla saadaan huomattavaa joukko muita raja-arvo tuloksia on raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Tämä osoitettiin Arkhmedeen ominaisuuden avulla edellisessä luvussa (Esimerkki 124).

2) Esimerkissa 124 myös näytettiin miten edellisen tuloksen ja Bernoullin epäyhtälön avulla voidaan näyttää, että

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

kun $|x| < 1$. Kun $|x| > 1$ jonon x^n jäsenet kasvavat rajatta, joten jono ei ole rajoitettu, eikä näin ollen suppenee. Kun $x = 1$ jono on vakiojono $x_n = 1$, joka suppenee kohti lukua 1. Kun $x = -1$ kyseessä on vuorotteleva jono $(1, -1, 1, \ldots)$, joka ei tietysti suppene (miksi?), mutta jolla on osajonoja, jotka suppenevat kohti lukua 1 sekä osajonoja, jotka suppenevat kohti lukua -1.

3) Olkoon $a > 1$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

millä tahansa vakiolla $k \in \mathbb{N}$. Tulos voidaan ilmastaa sanomalla, että ”eksponentti voittaa polynomin”. Väite voidaan osoittaa seuraavasti. Merkitään $y_n = \frac{n^k}{a^n}$ ja tutkitaan tämän jonon peräkkäisten jäsenten osamääriä. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^n} = (1 + \frac{1}{n})^k a^{-1}.$$

Lemmasta 126 seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^k a^{-1} = (1+0)^k a^{-1} = a^{-1} < 1.$$

Raja-arvon määritelmästä seuraa (miten?) että on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq n_0$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = (1 + \frac{1}{n})^k a^{-1} < c < 1,$$

missä c on n:stä riippuva vakio. Erityisesi kaikilla $n \geq n_0$

$$y_{n+1} \leq c_n y_n.$$

Koska arvot y_n, $n < n_0$ eivät vaikuta raja-arvoon, voidaan olettaa, että tämä tulos pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Induktiolla saadaan

$$0 < y_n \leq c^n y_1.$$

Koska $0 < c < 1$, lauseke $c^n y_1$ suppenee kohti nollaa. Väite saadaan helposti tästä.

4) Samalla idealla voidaan seuraavaksi osoittaa, että ”kertoma voittaa eksponentin” eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

kaikilla $a > 1$. Tässä $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mielivaltainen jono. Määritellään (induktiolla) sen *osasummeista* muodostettu jono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ehdoilla

$$y_0 = x_0,$$

$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1}.$$

Tälläista jonoa sanotaan jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ määrämäksi *sarjaksi.* Sen jäsen y_n on siis äärellinen summa

$$y_n = x_0 + \ldots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i,$$

missä oikealla puolella käytetään summan "sigma"-merkintää.
Jos tällainen sarja (y_n) suppenee, niin sen raja-arvoa merkitään

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i.$$

Tämä luku on tällöin *sarjan summa.*

Esimerkki 131. *Olkoon* $0 < c < 1$ *vakio ja tarkastellaan jonon* $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *määrämää sarjaa eli sarjaa, jonka n'nnes jäsen on summa*

$$y_n = c^0 + c^1 + \ldots + c^n = 1 + c + c^2 + \ldots + c^n.$$

Tätä sarjaa sanotaan geometriseksi. *Helposti nähdään, että*

$$cy_n = c + c^2 + \ldots + c^{n+1} = y_n + c_{n+1} - 1,$$

mistä

$$y_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

Koska $c^{n+1} \to 0$ *kun* $n \to \infty$*, sarjalla on summa*

$$y = \frac{1}{1 - c}.$$

Erityisesti geometrinen sarja suppenee (kun suhdeluku $c \in]0, 1[$*).*

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Määritellään välit $]a, b[$ (avoin väli), $[a, b]$, (suljettu väli) $]a, b]$, $[a, b[$ (puoliavoimet välit) kaavoilla

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Tällaisia välejä sanotaan *rajoitetuiksi.* On olemassa myös rajoittumattomia välejä, jotka ovat muotoa

$$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$
$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\},$$
$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}.$$

Tietysti myös $\mathbb{R}$ itse lasketaan rajoittumattomaksi väliksi $]-\infty, \infty[$.

Desimaaliluvut.
Olkoon $x > 0$ positiivinen reaaliluku. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n < x \leq n+1.$$

Asetetaan $x_0 = n$.
Jaetaan puoliavoin väli $I_0 =]n, n+1]$ kymmeneen yhtäpitkään osaväliin $I_0^0 =]n, n+\frac{1}{10}]$, $I_0^1 =]n+\frac{1}{10}, n+\frac{2}{10}]$, ..., $I_0^9 =]n+\frac{9}{10}, n+1]$. Huomaa, että kyseiset välit ovat erillisiä ja niiden yhdiste on koko väki I_0. Näin ollen x on tasan yhden tällaisen välin $I_1 = I_0^{k_1} =]n+\frac{k_1}{10}, n+\frac{k_1+1}{10}]$ piste, $k_1 \in \{0, 1 \ldots, 9\} = I(10)$ (alkusegmentti). Asetetaan $x_1 = n + \frac{k_1}{10}$. Huomaa, että

$$n = x_0 \leq x_1 < x \leq x_1 + \frac{1}{10}.$$

Jatketaan samalla tavalla. Seuraavassa vaiheessa jaetaan väli I_1 kymmeneen eri osaan

$$I_1^k =]n + \frac{k_1}{10} + \frac{k}{10^2}, n + \frac{k_1}{10} + \frac{k+1}{10^2}],$$

$k \in I(10)$. Poimimalla taas yksikäsitteinen väli $I_2 = I_1^{k_2}$ jolle $x \in I_2$, saadaan konstruoitua jonon seuraava alkio $x_2 = n + \frac{k_1}{10} + \frac{k}{10^2}$.
Näin jatketaan induktiolla. Oletetaan, että $x_m, m \geq 1$ on jo konstruoitu. Tällöin

$$x_{m-1} \leq x_m = n + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10}^2 \ldots + \frac{k_m}{10^m},$$

missä $k_i, i = 1, \ldots, m$ ovat kokonaislukuja joukosta

$$I(10) = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Vastaava väli I_m on väli $]x_m, x_m + \frac{1}{10^m}]$. Jaetaan se taas kymmenteen erilliseen puoliavoimeen osaväliin, joiden pituus on $1/10^{m+1}$, poimitaan niistä se väli I_{m+1} joka sisältää pisteen x ja valitaan x_{m+1}:ksi sen välin vasenta päätepistettä. Tällöin siis

$$x_m \leq x_{m+1} = x_m + \frac{k_{m+1}}{10^{m+1}} \leq x \leq x_m + \frac{1}{10^{m+1}},$$

jollakin $k_{m+1} \in I(10)$.
Näin saadaan konstruoitua monotoninen jono $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, jonka jäsenet ovat muotoa

$$x_m = n + \frac{k_1}{10} + \frac{k}{10^2} + \ldots + \frac{k_m}{10^m},$$

$k_1, \ldots, k_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Lisäksi

$$0 < x - x_m \leq \frac{1}{10^m}.$$

Esimerkin 124 nojalla oikeanpuoleinen lauseke saadaan mielivaltaisen pieneksi, mistä seuraa, että

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x.$$

Näin ollen x voidaan esittää sarjana

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{10^i},$$

missä $k_0 = n$. Tällaista sarjaa kirjoitetaan yleensä niin sanottuna *desimaalilukuna*

$$n, k_1 k_2 \ldots k_m \ldots.$$

Luvussa 10 yllä ei ole matematiikan näkökulmasta mitään ainutlaatuista, sen valinta juontuu vain siitä, että historiallisista syistä lukuja on ollut tapana esittää 10-*kantajärjestelmässä*.
Yhtä hyvin voidaan ottaa 10:n sijaan desimaaliesitysten *kantaluvuksi* mikä tahansa luonnollinen luku $l > 1$. Konstruktio etenee samalla tavalla - aloitetaan valitsemalla $x_0 = n$, missä n on luonnollinen luku, jolle $n < x \leq n + 1$, sitten jaetaan väli $]n, n+1]$ tasan l yhtäpitkään osaväliin $I_0^0 =]n, n + \frac{1}{l}]$, ..., $I_0^i =]n + \frac{i}{l}, n + \frac{i+1}{l}]$, ..., $I_0^{l-1} =]n + \frac{l-1}{l}, n+1]$. Niistä valitaan se ainoa, johon x kuuluu ja jatketaan samalla tavalla. Induktiivisesti konsruoidaan jono lukuja $k_1, \ldots, k_m, \ldots \in I(l) = \{0, \ldots, l-1\}$ siten, että

$$x_m = n + \frac{k_1}{l} + \frac{k}{l^2} + \ldots + \frac{k_m}{l^m}$$

ja $x \in]x_m, x_m + \frac{1}{l^m}]$. Koska $1/l^m \to 0$ kun $m \to \infty$ tästä seuraa, että

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{l^i},$$

missä $k_0 = n$. Tätä merkitään desimaalimuodossa

$$x_l = n, k_1 k_2 \ldots k_m \ldots,$$

missä alaindeksi l viittaa järjstelmän kantalukuun.
Olemme näyttäneet, että jokainen reaaliluku voidaan esittää desimaalilukuna. Siinä emme tarvineet mitään syvällisiä reaalilukujen ominaisuuksia, yhtä hyvin sama väite olisi voinut todistaa vain rationaaliluvuille. Kuitenkin jos tarkastellaan käänteistä väitettä eli yritetään osoittaa, että jokaista desimaaliesitystä vastaa jokin reaaliluku, tarvitaan $\mathbb{R}$:n täydellisyyttä.
Esitetaan ensin formaali määritelmä mielivaltaiselle desimaaliluvulle. Valitaan järjestelmän kantaluku $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$. Olkoon $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jono luonnollisia lukuja, jotka kaikki kuuluvat joukkoon

$$I(l) = \{0, 1, \ldots, l-1\}$$

(luvun l mää͏ärämä alkusegmentti $\mathbb{N}$:ssä), paitsi $k_0 = n$, jonka sallitaan olevan mielivaltainen luonnollinen luku. Tällöin desimaaliluku

$$n, k_1 k_2 \ldots k_m \ldots$$

määritellään olevan sarjan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{l^i} = n + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{l^i}$$

arvo. Määritelmän mukaan tämä arvo on siis jonon (x_m) raja-arvo, missä

$$x_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{k_i}{l^i}.$$

Seuraavassa propositiossa todistamme, että tällainen sarja aina suppenee, joten jokaista jonoa $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vastaa jokin desimaaliluku $\mathbb{R}$:ssä. Lisäksi erillaisia valintoja vastaavat erilaiset desimaaliluvut, **jos** rajoidutaan tarkastelu niin sanottuihin päättymättömiin desimaalilukuihin.
Toistaiseksi sanalla "desimaaliluku" tai "desimaaliesitystä" tarkoitamme formaalisti yksinkertaisesti mielivaltaista jonoa $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jono luonnollisia lukuja, jolle $k_i \in I(l) = \{0, 1, \ldots, l-1\}$ kaikilla $i \geq 1$. Tällaista desimaalilukua sanotaan olevan *päättyvä* jos on olemassa $m_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $k_m = 0$ kaikilla $m \geq m_0$. Tällöin jono $x_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{k_i}{l^i}$ on vakiojono alkaen indeksista m_0,

$$x_m = x_{m_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_i}{l^i} = n + \frac{k_1}{l} + \frac{k}{l^2} + \ldots + \frac{k_{m_0}}{l^{m_0}},$$

joten vastaava desimaalilukukin on tällöin äärellinen summa

$$n + \frac{k_1}{l} + \frac{k}{l^2} + \ldots + \frac{k_m}{l^m}.$$

Erityisesti jokainen päättyvä desimaaliluku edustaa rationalilukua. Käänteinen ei päde - on olemassa rationaalilukuja, joilla ei ole päättyvää desimaaliesitystä. Esimerkiksi 10-järjestelmässä, jossa kantaluku $l0$ rationaaliluvun $1/3$ ainoa desimaaliesitys on

$$0,33333\ldots,$$

eli vastaa jonoa $k_0 = 0$, $k_i = 3$, $i \geq 1$. Jos taas kantaluvuksi valitaan $l = 3$, niin luvulla $1/3$ on päättyvä desimaaliesitys $0,1$. Samalla luvulla on myös toinen desimaaliesitys

$$0,0222\ldots.$$

Seuraavassa propositiossa näytetään, että näin tapauhtuu aina - samalla luvulla voi olla korkeintaan kaksi erilaista desimaaliesitystä, ja jos sillä on kaksi esitystä toinen niistä on päättyvä.
Desimaalilukua, joka ei ole päättyvä sanotaan *päättymättömäksi.* Yllä jokaiselle reaaliluvulle olemme konstruoineet juuri päättymättömän desimaaliesityksen.
Edellisessä esimerkissä rationaalivulle $1/3$ löydettiin (10-järjestelmässä) päättymätön esitys $0,333333\ldots$, joka näyttää varsin "säänöllisestä" - siinä toistuu sama luku 3 loputtomiin. Yleisemmin desimaaliluku

$$n, k_1k_2\ldots k_m\ldots$$

sanotaan *jaksolliseksi*, jos sama äärellinen pätkä alkaa toistua jonossa $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ alkaen jostakin indeksistä. Formaalisti - on olemassa $i_0 \in \mathbb{N}$ (jakson alkukohta), $s \in \mathbb{N}, s \geq 1$ (jakson pituus) siten, että $k_i = k_{i+s}$ kaikilla $i \geq i_0$. Esimerkiksi

Jaollisuusteorian avulla ei ole vaikeata näyttää, että reaaliluvun desimaaliesitys on jaksollinen jos ja vain jos luku on rationaaliluku. Pohjimmiltaan tämä johtuu siitä, että jokaiselle $m \in \mathbb{N}$ on olemassa vain äärellisen monta erilaista jakojäännöstä r, joita saadaan kun mielivaltainen kokonaisluku m jaetaan luvulla n.

Pidetään edelleenkin kantaluku l kiinnitettynä. Merkitään $\mathcal{D}$:llä kaikkien **päättymättömien** desimaaliesitysten muodostamaa joukkoa. Yllä olemme konstruoineet jokaiselle $x \in \mathbb{R}_+$ kanonisella tavalla päättymättömän desimaaliluvun

$$n, k_1k_2\ldots k_m\ldots,$$

jonka arvo on x (l-kantaisessa järjestelmässä). Merkitään tätä desimaalilukua $d(x)$:llä. Näin saadaan kuvaus $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{D}$. Tässä

$$R_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

on positiivisten reaalilukujen joukko.

Propositio 132. *Kuvaus $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{D}$ on bijektio. Reaaliluvut ja päättymättömät desimaaliluvut vastaavat siis toisiaan yksikäsitteisesti.*
Kaksi erilaista desimaalilukua edustavat samaa positiivista reaalilukua jos ja vain jos toinen niistä on päättyvä jono muotoa $n, k_1 \dots k_i$, $k_i \neq 0$, jolloin toinen on välttämättä muotoa

$$n, k_1 \dots (k_i - 1) l' l' l' \dots,$$

missä $l' = l - 1$. Erityisesti jokaisella reaaliluvulla on korkeintaan kaksi erilaista desimaaliesitystä.

Todistus. Desimaalilukua $f(x) = (k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vastaava sarja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{l^i}$$

suppenee kohti x. Näin ollen, jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$ raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla.
Osoitetaan, että f on surjektio. Olkoon $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ desimaaliluku eli jono, missä $k_i \in \mathbb{N}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq k_i < l$ kaikilla $i \geq 1$. Vastaavan sarjan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{l^i}$$

arvo on määritelmän mukaan jonon $x_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{k_i}{l^i}$ raja-arvo, jos sellainen on olemassa. Selvästi

$$x_{m+1} = x_m + \frac{k_{m+1}}{l^{m+1}} \geq x_m,$$

joten jono on monotoninen. Lemman 129 nojalla se suppenee, jos osoitamme se lisäksi rajoitetuksi. Näin ollen riittää osoittaa, että jono (x_m) on rajoitettu. Selvästi $x_m \geq n = k_0$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Toisaalta kaikilla $m \in \mathbb{N}$

$$x_m = n + \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{l^i} \leq n + \sum_{i=1}^{m} \frac{l}{l^i} = n + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{l^{i-1}}).$$

Oikealla puolella esintyy geometrisen sarjan

$$\sum_{i=1}^{\infty} c^i$$

osasumma $\sum_{i=1}^{m} c^i$, suhdelukuna $c = 1/l < 1$. Esimerkin 131 nojalla, tämä sarja suppenee, erityisesti pysyy rajoitettuna ylhäältä. Näin ollen myös x_m

pysyy rajoitettuna ja olemme valmiit.

Proposition loppuosaa emme tarvitse, joten sen todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Seuraus 133. *Reaalilukujen joukko on yhtämahtava luonnollisten lukujen joukon* $\mathbb{N}$ *potenssijoukon* $\mathcal{P}(X)$ *kanssa,* $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$*. Erityisesti* $\mathbb{R}$ *on ylinumeroituva.*
Itse asiassa jokainen $\mathbb{R}$*:n väli (avoin tai suljettu, rajoitettu tai rajoittumaton) on yhtämahtava* $\mathbb{R}$*:n kanssa.*

Todistus. Cantor–Bernstein–Schroederin Lauseen nojalla riittää osoittaa, että $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ ja $|\mathbb{R}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Koska kaikki $\mathbb{R}$:n mallit ovat isomorfisia, erityisesti yhtämahtavia, riittää osoittaa, että $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ jollekin konkreettiselle $\mathbb{R}$:n mallille. Otetaan sellaiseksi avointen Dedekindin leikkausten malli. Tällöin jokainen reaaliluku x on määritelmän mukaan $\mathbb{Q}$:n osajoukko, $x \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Näin ollen $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$, joten erityisesti $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. Koska $\mathbb{Q}$ on numeroituva eli $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, tästä helposti seuraa, että $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Yhdistämällä näitä tuloksia, nähdään, että $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Kääntäisen väitteen $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ todistamiseksi käytämme desimaaliesityksiä. Olkoon $A \subset \mathcal{P}(X)$. Määritellään 10-kantalukujärjestelmän desimaaliluku $d_A = (k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ kaavalla

$$k_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } i \in A \\ 2, & \text{jos } i \notin A. \end{cases}$$

Edellisestä Propositiosta helposti seuraa, että kuvaus $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto d_A$ on injektio (mieti yksityiskohtia läpi). Väite todistettu.

Itse asiassa edellisen kuvaus kuvaa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ rajoitetulle suljetulle välille $[1, 3] \subset \mathbb{R}$, mistä nähdään, että $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ei ole vaikeata osoittaa, että kaikki rajoitetut välit (suljetut, avoimet tai puoliavoimet) ovat yhtämahtavia (HT), joten jos $\Delta \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu väli, niin

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\Delta| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|,$$

mistä Cantor–Bernstein–Schroederin Lauseen nojalla nähdään, että Δ:llä on sama mahtavuus kuin $\mathbb{R}$:llä. Jokainen rajoittumaton väli Δ' puolestaan sisältää rajoitetun välin, joten ketjun

$$|\mathbb{R}| = |\Delta| \leq |\Delta'| \leq |\mathbb{R}|$$

nojalla myös rajottumaton väli Δ' on yhtämähtava $\mathbb{R}$:n kanssa. $\square$

Seuraus 134. *Taso* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *on yhtämahtava* $\mathbb{R}$*:n kanssa.*

Todistus. Edellisen proposition nojalla $|\mathbb{R}| = |]0,1]|$, missä Tästä helposti seuraa, että

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |]0,1] \times]0,1]|,$$

joten riittää osoittaa, että $|]0,1] \times]0,1]| =]0,1]| = |\mathbb{R}|$. Olkoon $(x,y) \in]0,1] \times]0,1]$. Olkoot $d(x) = (k_i)$ ja $d(y) = (l_i)$ x:n ja y:n päättymättömiä desimaaliesityksiä (jotka ovat yksikäsitteisiä Proposition 132 nojalla). Huomaa, että tällöin $k_0 = l_0 = 0$ Määritellään desimaaliluku $f(x,y) = (m_i)$ kaavalla

$$\begin{cases} m_0 = 0, \\ m_{2i} = k_i, i > 0, \\ m_{2i+1} = k_i, i \geq 0. \end{cases}$$

Propositiosta 132 helposti seuraa, että f on bijektio $]0,1] \times]0,1] \to]0,1]$. $\square$

Edellisestä propositiosta seuraa varsin yllättävä tulos - tasossa on "saman verran" pisteitä kuin lukusuoralla. Tulos tuntuu intuitiivisesti omituiselta, mutta kenties se johtuu siitä, että mahtavuus-tarkastelu ei ota joukkojen "geometriaa" mitenkään huomioon, kun taas käsityksemme siitä, että tasossa on "enemmän tavaraa" johtuu juuri geometrisista mielikuvista. Jos lukusoran ja tason geometriaa otetaan huomioon, voidaan matemaattisesti osoittaa, että juuri geometrisina oliona ne ovat hyvin erilaisia.
Induktiolla voidaan nyt näyttää, että $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti myös avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on saman verran alkioita kuin lukusuoralla tai tasolla. Ei ole vaikeata näyttää, että pätee jopa $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Sen sijaan $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on mahtavuudeltaan aidosti suurempi kuin $|\mathbb{R}|$.

Raja-arvo ja jatkuvuus.

Raja-arvon käsitettä voidaan määritellä myös kuvauksille $f\colon A \to \mathbb{R}$, missä $A \to \mathbb{R}$. Piste $x_0 \in \mathbb{R}$ sanotaan olevan joukon $A \subset \mathbb{R}$ *kosketuspisteeksi*, jos "mielivaltaisen läheltä" pistettä x_0 löytyy joukon A pisteitä. Formaalisti - jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $x \in A$ jolle

$$|x_0 - x| < \delta.$$

Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja olkoon x_0 joukon A kosketuspiste. Reaaliluku $y \in \mathbb{R}$ on kuvauksen f *raja-arvo* pisteessä x_0 jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x \in A$ joille $|x_0 - x| < \delta$ pätee

$$|f(x) - y| < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään

$$y = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Jos halutaan korostaa, että kuvausta f tarkastellaan vain joukossa A (esimerkiksi tilanteessa jossa se voidaan laajentaa A:n ulkopuolelle) merkitään

$$y = \lim_{x \to x_0, x \in A} f(x),$$

jolloin voidaan myös sanoa, että raja-arvo pisteessä x_0 otetaan *pitkin* joukkoa A.

Perinteisesti on olemassa myös toinen lähestymistapa raja-arvoon määritelmään, jossa aina erikseen vaaditaan, että tapauksessa $x_0 \in A$ pisteen x_0 arvoa $f(x_0)$ ei raja-arvossa oteta huomioon. Tämä tilanne on helppoa simuloida meidän määritelmän puitteissa ottamalla tarvittaessa raja-arvo pitkin joukkoa $A \setminus \{x_0\}$.

Raja-arvo ei tietenkään aina ole olemassa. Jos se on olemassa, se on yksikäsitteinen. Jos yllä otetaan raja-arvo pitkin joukkoa A pisteessä $x_0 \in A$, niin välttämättä raja-arvo on $f(x_0)$ (miksi?).

Oletetaan, että $f \colon A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Sanotaan, että f on *jatkuva* pisteessä x_0 jos raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on olemassa. Edellisestä seuraa, että tällöin välttämättä

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Kuvaus $f \colon A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in A$.

Esimerkkejä 135. *(1) Identtinen kuvaus* $\mathrm{id} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}(x) = x$ *on jatkuva. Jokainen vakiokuvaus* $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, c(x) = c \in \mathbb{R}$ *on jatkuva. Alla mainitun proposition 136 nojalla induktiolla helposti nähdään, että jokainen niin sanottu* polynomifunktio $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on jatkuva. Polynomifunktio on kuvaus* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *joka on muotoa*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

missä $a_n, \ldots, a_1, a_0$ *ovat vakioita.*

(2) Rationaalifunktio on kahden polynomikuvauksen p, q *pisteittäinen osamäärä eli kuvaus* $r \colon \mathbb{R} \setminus B \to \mathbb{R}$, *joka on määritelty kaavalla*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Tässä B on nimittäjän q nollakohtien joukko (jossa r ei tietenkään ole määritelty).

(3) *Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \textit{jos } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tällöin f ei ole jatkuva missään pisteessä.

(4) *Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti. Jos $x \in \mathbb{Q}$ esitetään se muodossa $\frac{m}{n}$, missä $\mathrm{syt}(m,n) = 1$ ja $n > 0$ (tällainen esitys on yksikäsitteinen, Lemma 103). Asetetaan $f(x) = \frac{1}{n}$. Jos taas $x \notin \mathbb{Q}$, asetetaan $f(x) = 0$. Voidaan osoittaa (HT), että f on jatkuva jokaisessa irrationaalipisteessä ja ei ole jatkuva missään rationaalipisteessä.*

Seuraavassa propositiossa kootaan jatkuvuuden perusominaisuuksia. Ne ovat tuttuja analyysin peruskursseilta, joten todistuksia sivutetaan.

Propositio 136. *1) Olkoot $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuvia kuvauksia ja olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio.*
Tällöin kuvaukset $f+g, f-g, af, fg$ ovat jatkuvia. Lisäksi, jos $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in A$, niin f/g on myös jatkuva.
2) Jos $B \subset A$, niin rajoittuma $f|B\colon B \to \mathbb{R}$ on myös jatkuva.
3) Jatkuvuutta voidaan karakterisoida jonojen avulla. Nimittäin kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva jos jokaisella jonolla $(x_n) \subset A$, joka suppenee kohti $x \in A$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Analyysissa tutkitaan lähinnä jatkuvia kuvauksia $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, missä $\Delta \subset \mathbb{R}$ on väli. Tärkeimpiä tällaisten kuvausten ominaisuuksia ovat Bolzanon Lause ja tulos jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvon.

Lause 137 (Bolzanon Lause). *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli ja $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Olkoot $a, b \in \Delta$ ja oletetaan, että reaaliluku $c \in \mathbb{R}$ sijaitsee $f(a)$:n ja $f(b)$:n välillä. Tällöin on olemassa $x \in [a,b]$ siten, että $f(x) = c$.*
Erityisesti kuvajoukko $f(\Delta) = \Delta' \subset \mathbb{R}$ on myös väli.

Todistus. Oletetaan esimerkiksi, että $f(a) < f(b)$. Meidän on todistettavaa, että jokainen $c \in [f(a), f(b)]$ on kuvajoukossa $f([a,b])$ eli on olemassa $x \in [a,b]$ jolle $f(x) = c$. Tehdään vasta-oletus, tällöin joukko

$$A = [f(a), f(b)] \setminus f([a,b])$$

on epätyhjä. Se on myös selvästi rajoitettu ylhäältä, joten on olemassa $c = \sup A \in [f(a), f(b)]$. Koska $f(b) \notin A$, $c < f(b)$, joten kun $n \geq n_0$ on tarpeeksi iso, $c_n = c + \frac{1}{n} \in [f(a), f(b)]$. Koska $c_n > c$ kaikilla $n \geq n_0$ ja $c = \sup A$, $c_n \notin A$ kaikilla $n \geq n_0$, joten $c_n = f(x_n)$ jollakin $x_n \in [a, b]$. Jono (x_n) on rajoitettu, joten sillä on suppeneva osajono (x_{n_k}), joka suppenee kohti x. Lisäksi, koska $a \leq x_n \leq b$, niin myös $a \leq x \leq b$ eli $x \in [a, b] \subset \Delta$. Nyt $c_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$ kuvauksen f jatkuvuuden nojalla. Toisaalta $c_n \to c$ konstruktion perusteella, joten myös osajono c_{n_k} suppenee kohti c:tä. Koska raja-arvo on yksikäsitteinen, $c = f(x)$, missä $x \in [a, b]$. Tämä on mahdotonta, sillä $c \in A$. Saatu ristiriita osoittaa sen, että $A = \emptyset$.

Lauseen toinen väite perustuu seuraavaan tosiasiaan - jos $\Delta' \subset \mathbb{R}$ on välien yhdiste, se on myös väli. Tämä tuntuu intuitiivisesti aika selvältä, mutta sen todistus myös nojautuu täydellisyysaksioomaan. Esimerkiksi $\mathbb{Q}$:ssä väite ei päde - osajoukko $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 2\}$ voidaan esittää avointen välien yhdisteenä, mutta se ei ole itse avoin väli $\mathbb{Q}$:ssä eli ei ole muotoa $\{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ millään $a, b \in \mathbb{Q}$.
Väitteen tarkka todistus $\mathbb{R}$:ssä jätetään harjoitustehtäväksi. □

Bolzanon Lauseen avulla voidaan esimerkiksi todistaa kuvausten nollakohtien olemassaoloa. Esimerkiksi olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2$. Tällöin $f(1) = -1 < 0$ ja $f(2) = 6 > 0$, joten jossakin välillä $[1, 2]$ on olemassa reaaliluku x jolle $f(x) = 0$. Toisin sanoen kuutiojuuri $\sqrt[3]{2}$ on olemassa.
Rationaalilukujen joukossa Bolzanon Lause ei päde - esimerkiksi kuvaukselle $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 - 2$ pätee $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, mutta ei ole olemassa $q \in \mathbb{Q}$ jolle $f(q) = 0$, sillä tällainen q olisi $\sqrt{2}$. Yleisesti voidaan näyttää, että Bolzanon Lause ei päde järjestettyssä kunnassa, joka ei ole $\mathbb{R}$. Näin ollen Bolzanon Lause on yhtäpitävä täydellisyysaksiooman kanssa. Koska Bolzanon Lauseen totuutta on helppoa hyväksyä intuitiion pohjalta, tästä saadaan myös hyvä motivaatio täydellisyysaksioomalle (jonka totuus ei kenties olekaan niin selvä intuitiion näkökulmasta).

Lause 138. *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja olkoon $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Tällöin $f[a, b]$ on myös suljettu väli $[c, d]$. Erityisesti f saavuttaa pienimmän arvonsa c ja suurimman arvonsa d.*

Todistus. Edellisen Lauseen nojalla $f[a, b]$ on väli, mutta a priori se olisi voinut olla rajoittumaton tai ei olisi suljettu. Tehtävä on siis näyttää, että suljetun välin tapauksessa se on aina suljettu rajoitettu väli.
Osoitetaan ensin, että $f[a, b]$ on rajoitettu $\mathbb{R}$:ssä. Tehdään vasta-oletus, tällöin voidaan lähtöjoukossa $[a, b]$ poimia jono (x_n), jolle pätee $|f(x_n)| > n$ (tarkka konstuktio tehdään induktiolla). Koska jono (x_n) on rajoitettu, sillä

on suppeneva osajono $(x_{n_k}) \to x$. Lisäksi $x \in [a, b]$, joten $f(x)$ on määritelty (tämä kohta todistuksesta ei menisi läpi, jos tarkasteltaisiin ei-suljettua väliä - tällöin välin jonon raja-arvo olisi voinut mennä välin ulkopuolelle. Tarkasteltava Lausehän EI ole totta ei-suljetulle välille). Lisäksi f:n jatkuvuuden perusteella $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Erityisesi jono $f(x_{n_k})$ suppenee, joten se on rajoitettu (Lemma 129). Toisaalta se ei ole rajoitettu konstruktion perusteella. Saatu ristiriita osoittaa, että oletus on ollut väärä ja kuvajoukko $f[a, b] = \Delta'$ on rajoitettu. Erityisesti on olemassa $c = \sup \Delta'$ ja $d = \inf \Delta'$. Näytetään, että molempia arvoja saavutetaan, eli $c, d \in \Delta'$. Tehdään vasta-oletus - esimerkiksi $c \notin \Delta'$. Tällöin kuvaus $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{c - f(x)}$$

on hyvinmääritelty ja jatkuva kuvaus. Juuri todistetun nojalla sen kuvajoukko on rajoitettu. Mutta $f(x)$ saa arvoja mielivaltaisen lähellä c:tä, joten $c - f(x)$ saa välillä $[a, b]$ mielivaltaisen pieniä arvoja, mistä seuraa, että g saa mielivaltaisen suuria arvoja, eli sen kuvajoukko ei ole rajoitettu. Saatu ristiriita osoittaa sen, että $c \in A$. Samalla tavalla nähdään, ett' $d \in A$. Bolzanon Lauseen nojalla f saa myös kaikki arvot c:n ja d:n välillä, joten $A = [c, d]$. $\square$

Kuvaus $f\colon A \to B$, missä $A, B \subset \mathbb{R}$ on *homeomorfismi*, jos se on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus $f^{-1}\colon B \to A$ on myös jatkuva. Tässä tietysti $B = f(A)$.
Yleensä bijektivisyys ja jatkuvuus eivät takaa vielä, että kuvaus olisi homeomorfismi eli sen, että käänteiskuvauskin olisi jatkuva. Kuitenkin yksi tärkeimmistä $\mathbb{R}$:n ominaisuuksista on siinä, että **välillä** määritelty jatkuva bijektio on aina homeomorifmismi.

Palautetaan mieleen, että kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}$ on *kasvava*, jos kaikilla $x, y \in A, x < y$ pätee

$$f(x) \leq f(y)$$

ja on vähenevä jos kaikilla $x, y \in \Delta, x < y$ pätee

$$f(x) \geq f(y).$$

Jos epäyhtälö on aina aito, kuvaus on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Kuvaus joka on (aidosti) kasvava tai vähenevä on *(aidosti) monotoninen.*
Yllä olemme todistaneet (Lemma 129), että jokainen monotoninen rajoitettu jono suppenee. Tämän tuloksen avulla voidaan helposti osoittaa seuraavaa. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli, $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ monotoninen kuvaus ja olkoon $x_0 \in \Delta$

mielivaltainen. Tällöin on olemassa niin sanottu *vasemmanpuoleinen* raja-arvo

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0)_-,$$

paitsi jos x_0 on välin Δ pienin luku eli vasemmanpuoleinen päätepiste. Itse asiassa, jos f on aidosti kasvava, niin

$$f(x_0)_- = \sup\{f(x) \mid x \to x_0, x < x_0\}.$$

ja jos f vähenevä kyseessä on infimum (mieti yksityiskohtia läpi).
Samoin, jos x_0 ei ole välin oikea päätepiste, on olemassa *oikeanpuoleinen* raja-arvo

$$\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = f(x_0)_+.$$

Lisäksi kaikilla $x_0 \in \Delta$

$$f(x_0)_- \leq f(x_0) \leq f(x_0)_+$$

(päätepisteissä vasen- tai oikeapuoleinen luku ei määritelty) ja kuvaus f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vai jos yllä pätee yhtäsuuruus ei

$$f(x_0)_- = f(x_0) = f(x_0)_+.$$

Lemma 139. *Olkoon $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ monotoninen kuvaus, missä Δ on väli. Tällöin f on jatkuva jos ja vain jos $f(\Delta) = \Delta'$ on väli.*

Todistus. Jos f on jatkuva, se kuvaa välit väleiksi (Bolzanon Lause).
Kääntäen, oletetaan, että monotoninen kuvaus f ei ole jatkuva pisteessä x_0 ja näytetään, että tällöin $f(\Delta)$ ei ole väli.

Voidaan olettaa, että f on kasvava (tapaus f on vähenevä menee samalla tavalla). Koska f ei ole jatkuva x_0:ssä, epäyhtälöketjussa

$$f(x_0)_- \leq f(x_0) \leq f(x_0)_+$$

on ainakin yksi aito epäyhtälö. Oletetaan esimerkiksi, että

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0)_- < f(x_0) = y_0.$$

Jos $x < x_0$, niin pätee

$$f(x) \leq \sup\{f(x) \mid x \to x_0, x < x_0\} = \lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0)_-.$$

Kun taas $x \geq x_0$, pätee $f(x) \geq f(x_0)$. Näin ollen jos valitaan jokin c lukujen $f(x_0)_-$ ja $f(x_0)$ välillä, c ei saavuteta, joten $f(\Delta)$ ei voi olla väli. $\square$

Varoituksen sana - edellinen Lemma pätee vain monotonisille kuvauksille. On olemassa epä-jatkuvia kuvauksia, jotka silti kuvaavat aina väliä väleiksi.

Propositio 140. *Olkoon $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus, missä Δ on väli. Tällöin f on injektio jos ja vain jos se on aidosti monotoinen kuvaus.*
Jos f on injektio, eli bijektio kuvauksena $f\colon \Delta \to f(\Delta)$, niin se on homeomorfismi.

Todistus. Kiinnitetään $x, y \in \Delta$, $x < y$. Tällöin joko $f(x) < f(y)$ tai $f(x) > f(y)$ (tapaus $f(x) = f(y)$ mahdoton, sillä f on injektio). Oletetaan esimerkiksi, että $f(x) < f(y)$ ja osoitetaan, että tällöin kaikilla $z \in]x, y[$ pätee $f(x) < f(z) < f(y)$.
Jos $f(z) < f(x)$, valitaan $c \in]f(z), \min\{f(x), f(y)\}[$ jatkuvuuden välillä sekä välillä $]x, z[$, että välillä $]z, y[$ löytyy pisteitä x_1, x_2, joille $f(x_1) = c = f(x_2)$, mikä on mahdotonta, sillä f on injektio. Samanlainen ristiriita saadaan, jos $f(z) > f(y)$. Olemme näyttäneet, että $f(x) < f(z) < f(y)$ kun $z \in]x, y[$. Olkoon myös $w \in]x, y[$ ja $w < z$. Tällöin, koska $f(x) < f(z)$, soveltamalla juuri todistettu väite arvoilla $x = x$ ja $y = z$, nähdään, että $f(x) < f(w) < f(z)$. Erityisesti f on aidosti kasvava välillä $]x, y[$.
Samalla tavalla nähdään, että jos $f(x) > f(y)$, niin f on aidosti vähenevä välillä $]x, y[$ (tai seuraa edellisestä soveltamalla funktioon $-f$).

Olkoon $z < x$. Osoitetaan, että $f(z) < f(x)$. Jos $f(z) > f(x)$, niin valitaan $c \in]f(x), \min\{f(y), f(z)\}[$. Tällöin sekä välillä $]z, x[$, että välillä $]x, y[$ löytyy pisteitä x_1, x_2, joille $f(x_1) = c = f(x_2)$, mikä on mahdotonta, sillä f on injektio. Näin ollen $f(z) < f(x)$ kun $z < x$. Tästä helposti saadaan taas kuten yllä, että $f(w) < f(z) < f(x)$ kun $w < z < x$.
Lopuksi samalla tavalla nähdään, että $f(y) < f(w) < f(z)$ kun $y < w < z$.
Yhdistämällä saatuja tuloksia nähdään, että f on aidosti kasvava.

Tapauksessa, jossa alunperin oli $f(x) > f(y)$ funktio $-f$ toteuttaa $-f(x) < -f(y)$, joten aidosti kasvava edellisen nojalla. Näin ollen f on tällöin aidosti vähenevä.

Kääntäen aidosti monotoninen kuvaus on selvästi injektio.

Olkoon f aidosti kasvava bijektiivinen jatkuva kuvaus $f\colon \Delta \to \Delta'$, missä Δ, Δ' ovat välejä. Osoitetaan, että $f^{-1}\colon \Delta' \to \Delta$ on myös jatkuva.
Helposti nähdään, että aidosti kasvavan kuvauksen käänteiskuvaus on aidosti kasvava.
Näin ollen edellisen Lemman nojalla riittää näyttää, että $f^{-1}(\Delta')$ on väli. Mutta $f^{-1}(\Delta') = \Delta$! $\square$

Juuret.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ on aidosti kasvava (miksi?), joten edellisen Lauseen nojalla $f([0,\infty[)$ on väli ja $f\colon [0,\infty[\to f([0,\infty[)$ on homeomorfismi.
Koska $f(0)=0$ ja f on kasvava, $f(x)\geq 0$ kaikilla $x\in[0,\infty[$. Toisaalta Bernoullin epäyhtälöstä helposti seuraa, että $f((0,\infty])$ ei voi olla rajoitettu. Tästä on helppo päätellä, että

$$f([0,\infty[) = [0,\infty[.$$

Erityisesti f on surjektio, eli jokaisella ei-negatiivisella reaaliluvulla $a>0$ ja jokaisella $n\in\mathbb{N}$ on olemassa $x\geq 0$ jolle $f(x)=x^n=a$, toisin sanoen n'nnes juuri $\sqrt[n]{a}$.
Lisäksi edellisestä Propositiosta seuraa, että käänteiskuvaus $g(x)=\sqrt[n]{x}$ on jatkuva kuvaus $g\colon [0,\infty[\to[0,\infty[$.

Kun $n=2k$ on parillinen, niin tunnetusti $x^n=(-x)^n$, mistä seuraa, että jos $f(x)=x^n$ tarkastellaan kuvauksena $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, niin se ei ole injektio ja lisäksi $f(\mathbb{R})=f([0,\infty[)$, mistä seuraa, että negatiivisilla luvuilla ei ole n-juurta. Jos taas $n=2k+1$ on pariton, $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ on aidosti kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä, joten n'nnes juurifunktio $g(x)=\sqrt[n]{x}$ on määritelty kaikilla $x\in\mathbb{R}$, aidosti kasvava ja jatkuva.

Eksponenttifunktio.

Eksponenttifunktion $f(x)=a^x$, missä $a>0$ vakio, tarkka konstruktio on tunnetusti vaikea. Yksi tapa, jonka käymme tässä läpi, perustuu siihen, että eksponenttifunktio määritellään vaiheittain - ensin kun $x\in\mathbb{N}$, sitten kun $n\in\mathbb{Q}$ ja vasta sen jälkeen kaikilla $x\in\mathbb{R}$ "raja-arvokäynnillä". Tämä tapa on pitkä ja työläs, mutta se vastaa intuitiota.

Eksponenttifunktion "karakteristinen" ominaisuus on funktionaalinen yhtälö

$$f(x+y)=f(x)f(y), x,y\in\mathbb{R}.$$

Tätä ominaisuutta käytetään myös motivaationa konstruktion eri vaiheissa. Kiinnitetään $a>0$. Ensin määritellään induktiolla eksponentti a^n kaikilla $n\in\mathbb{N}$,

$$a^0=1,$$
$$a^{n+1}=a^n\cdot a.$$

Myös induktiolla helposti verifioidaan, että

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m, a^{nm} = (a^n)^m,$$

kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$ (HT).
Seuraavaksi määritelmä laajennetaan negatiivisiin kokonaislukuihin. Kun $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ asetetaan

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tässä $-n > 0$, joten a^{-n} on jo määritelty. Määritelmän taustana on se, että jos eksponentti $n \mapsto a^n$ toteuttaa karakteristisen yhtälön $a^{n+m} = a^n a^m$ kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$, niin on pakko olla

$$a^n a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1,$$

mikä pakottaa määritelmän yksikäsitteisesti yllä olevaan muotoon.
Sen jälkeen määritelmä laajennetaan rationaalilukuihin. Kun $q \in \mathbb{Q}$ esitetään se muodossa $q = \frac{m}{n}$, $q > 0$ ja sen jälkeen asetetaan

$$a^q = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a^m}).$$

Taustamotivaationa on taas se, että eksponenttisääntöjen nojalla pitäisi olla

$$(a^{1/n})^n = a^{n \cdot 1/n} = a^1 = a,$$

mistä seuraa, että $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.
Määritelmässä $a^q = \sqrt[q]{a^p}$ pitäisi tietenkin näyttää, että oikea puoli ei riipu esityksestä $q = m/n$ (rationaalilukuhan voidaan kirjoittaa kahden kokonaisluvun osamääränä monella eri tavalla). Tämä, sekä yhtälön $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a^m})$ verifiointi jätetään harjoitustehtäväksi. Näin saadaan eksponenttikuvaus $q \mapsto a^q$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Se toteuttaa karakteristisia yhtälöitä

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q, a^{pq} = (a^p)^q$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{Q}$ (HT).
Seuraavassa vaiheessa määritelmä pitää laajentaa myös irrationaalilukuihin. Tähän menneessä kaikki eksponenttifunktion laajennukset perustuivat algebraan. Laajennus reaalilukuihin taas on luonneeltaan ”topologinen” eli vaatii raja-arvokäynnin.

Toistaiseksi on konstruoitu kuvaus $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(q) = a^q$. Helposti nähdään (määritelmän perusteella), että $a^q > 0$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}$. Lisäksi ei ole vaikeata tarkistaa, että $a^q > 1$ kun $q > 0$ ja $a > 1$. Nyt jos $a > 1$ ja $x > y$, niin

$$f(x) = f(y + (y - x)) = f(y)f(y - x) > f(y),$$

koska $x - y > 0$. Näin ollen tässä tapauksessa f on aidosti kasvava.
Jos $0 < a < 1$, niin $b = 1/a > 1$. Koska

$$a^q = \frac{1}{b^q}$$

tällöin, ja $q \mapsto b^q$ on edellisen nojalla aidosti kasvava, $q \mapsto a^q$ on aidosti vähenevä.
Tietysti jos $a = 1$, $f \equiv 1$ on vakiokuvaus.

Olkoon $a > 1$ kiinnitetty ja $x \in \mathbb{R}$. Asetetaan

$$a^x = \sup\{a^q \mid q \leq x\} = \lim_{q \in \mathbb{Q}, q \leq x} f(q).$$

Koska a^q on kasvava, tämä antaa saman arvoon kuin edellä, jos $x \in \mathbb{Q}$. Määritelmästä helposti seuraa, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ on aidosti kasvava. Nimittäin olkoot $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Valitaan $q, q' \in \mathbb{Q}$ siten, että $x < q < q' < y$. Tällöin

$$a^x \leq a^q < a^{q'} \leq a^y.$$

Helpolla "raja-arvo käynnillä " nähdään, että f toteuttaa eksponenttifunktion karakteristisen yhtälön

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

(sekä yhtälön $a^{xy} = (a^x)^y$).

Osoitetaan, että $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Koska

$$|a^{x+h} - a^x| = |a^x a^h - a^x| = a^x|a^h - 1| = a^x|a^h - a^0|,$$

riittää osoittaa jatkuvuus pisteessä $x = 0$. Bernoullin epäyhtälön nojalla

$$b^n > 1 + n(b - 1)$$

kaikilla $b > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Soveltamalla tätä tapaukseen $b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, saadaan

$$a > 1 + n(a^{1/n} - 1),$$

mistä seuraa

$$0 \leq a^x - 1 < a^{1/n} - 1 < \frac{a - 1}{n}$$

kaikilla $0 \leq x < 1/n$. Kun $-1/n < x < 0$ pätee puolestaan

$$|a^x - 1| = 1 - a^x = 1 - \frac{1}{a^{-x}} \leq \frac{a^{-x} - 1}{a} < \frac{a-1}{an}.$$

Joka tapauksessa $|a^x - 1|$ saadaan pieneksi kun $|x| < 1/n$ ja n tarpeeksi suuri. Jatkuvuus osoitettu.
Jatkuvuuden nojalla $f(\mathbb{R})$ on väli. Koska $a^x > 0$ kaikilla $x > 0$, $a^{-n} \to 0$ kun $n \to \infty$ ja a^n, $n \in \mathbb{N}$ ei ole rajoitettu, voidaan helposti päätellä, että $f(\mathbb{R})$ on väli $]0, \infty[$ eli positiivisten reaalilukujen joukko.

Kun $0 < a < 1$ asetetaan

$$a^x = \frac{1}{b^x},$$

missä $b = 1/a$. Tällöin edellisistä tuloksista seuraa, että $x \mapsto a^x$ on aidosti vähenevä ja jatkuva kuvaus, jonka kuvajoukko on edelleenkin positiivisten reaalilukujen joukko.

Kun $a = 1$ saadaan vakiokuvaus $f \equiv 1$.

Voidaan osoittaa, että kuvaus $f(x) = a^x$ on **ainoa** jatkuva kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle pätee yhtälö

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

ja jolle $f(1) = a$.

Logaritmit.
Koska eksponenttifunktio $a \mapsto a^x$, $a > 0, a \neq 1$ on aidosti monotoninen jatkuva bijektio $\mathbb{R} \to]0, \infty[$, se on homeomorfismi ja sillä on jatkuva käänteiskuvaus $f^{-1} \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Tätä kuvausta sanotaan a-kantaiseksi logaritmifunktioksi. Merkitään

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Logaritmisäännöt seuraavat helposti vastaavista eksponenttisäännöistä.

Neperin luku.
Kuuluisa Neperin luku e tulee luonnollisella tavalla esille vastaa kun eksponenttifunktion differentioituvuutta ruvetaan miettimään. Palautetaan mieleen, että kuvauksen $f \colon \Delta \to \mathbb{R}$ (missä Δ on yleensä avoin väli) derivaatta $f'(x)$ pisteessä $x \in \Delta$ on niin sanotun erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}.$$

Derivaatta mittaa kuvauksen hetkellistä "muuttonopeutta" ja sen merkitystä sekä teorettisessa matematiikassa että sen sovelluksissa eksakteissa tieteissä voidaan tuskin aliarvioida.

Tutkitaan eksponenttifunktion $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x$ differentioituvuutta pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Määritelmän mukaan

$$f_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^h}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x f_a'(0),$$

edellyttäen, että $f_a'(0)$ on olemassa. Näin ollen riittää tutkia differentiotuvuutta pisteessä 0. Edellisestä seuraa, että jos f_a on derivoituva 0:ssä, niin se on derivoituva kaikilla ja $(f_a)'(x) = f_a(x)f_a'(0)$. Koska f_a ei ole vakio kuvaus kun $a \neq 1$, niin $f_a'(0) \neq 0$ kun $a \neq 1$ (muuten f_a:n derivaatta on identtisesti nolla, joten f_a olisi vakio).

Kiinnitetään jokin $b > 0, b \neq 1$ ja oletetaan, että $f_b'(0)$ on olemassa. Olkoon $a > 0, a \neq 1$ mielivaltainen. Tällöin $a = b^{\log_b a}$, joten

$$f_a'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^{h\log_b a} - 1}{h} = \log_b a \lim_{h\to 0} \frac{b^{h\log_b a} - 1}{h\log_b a} = \log_b a f_b'(0).$$

Koska $f_b'(0) \neq 0$ (kts. yllä) ja $\log_b a$ saa (tasan kerran) kaikki nollasta eroavat reaaliset arvot kun $a > 0$, $a \neq 1$, erityisesti on oltava (yksikäsitteinen) reaaliluku e, jolle

$$f_e'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Olemme siis päättyneet seuraavan johtopäätökseen - jos yksikin funktio f_a, $a > 0, a \neq 1$ on derivoituva yhdessäkin pisteessä, niin kaikki eksponenttifunktiot ovat derivoituvia kaikialla ja lisäksi on olemassa yksikäsitteinen luku e jolle

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Tällöin $f_e'(x) = e^x = f_e(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja jokaisella $a > 0, a \neq 1$ pätee $f_a'(x) = a^x \log_e a$. Yleensä merkitään $\log_e = \ln$ (luonnollinen logaritmi). Eksponenttifunktion derivointisäännöt ovat melkein johdettuja, PAITSI, että emme vieläkään tiedä, että kyseinen e olisi olemassa. Ainoata mitä siitä tiedetään tähän menneessä on yhtälö

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

jonka pitää päteä sille. Ongelmana on johtaa tästä jokin lauseke e:lle. Jatketaan seuraavasti. Merkitään $u = e^h - 1$. Tällöin $u \to 0$, kun $h \to 0$ ja $h = \ln(1+u)$. Tästä saadaan

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{1/u} = \ln(\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}),$$

logaritmin jatkuvuuden perusteella. Tässä olemme käyttäneet kaavan $a \log x = \log x^a$.
Yhtälöstä

$$\ln(\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}) = 1$$

seuraa logaritmin määritelmän perusteella

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e.$$

Näin ollen, jos e on olemassa, sen täytyy olla kuvauksen $(1+u)^{1/u}$ raja-arvo pisteessä 0. Jäljellä on vain sen osoittaminen, että kyseisellä lausekkeella todellakin on raja-arvo kun $u \to 0$.

Yleensä tehdään näin. Koska jonoja on yleisesti helpompaa tutkia kuin kuvauksia, tarkastellaan eri tapaus $u = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Saadaan jono $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ja kysymyksenä on, onko tällä jonolla raja-arvoa.
Voidaan osoittaa (esimerkiksi binomikaavan avulla, kts. kirjallisuudesta), että jono x_n on aidosti kasvava ja rajoitettu. Tästä seuraa (Lemma 129), että x_n todellakin suppenee! Merkitään

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n.$$

Sen jälkeen tämän avulla voidaan todistaa (sivutetaan), että

$$e = \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}.$$

Trigonometriset funktiot.

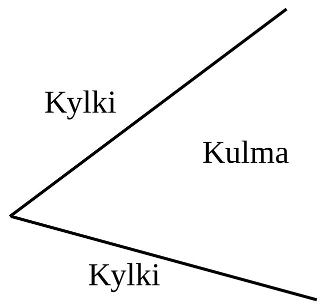
Perinteinen tapa määritellä trigonometrisia funktioita ja todistaa niiden ominaisuuksia on intuitiivinen, mutta ei ole ”formaali”, sillä se nojautuu geometrisiin käsitteisiin (kuten esimerkiksi kulma) ja kuviin.
Näytetään pikaiseesti miten voidaan rakentaa trigonometrisia funktioita täsmällisesti pitäen kuitenkin silmällä intuitiivisia mielikuvia. Esityksessä joudumme turvautumaan integraalilaskentaan.

Trigonometrisia kuvauksia määritellään yksikköympyrän avulla, joten ensin pitää formalisoida yksikköympyrän käsitteen. Onneksi se on helppoa. Yksikköympyrä S^1 on tason osajoukko, joka koostuu tasan niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on 1. Koska pisteen (x, y) etäisyys origoon eli normi on määritelmän mukaan $\sqrt{x^2 + y^2}$, määritellään

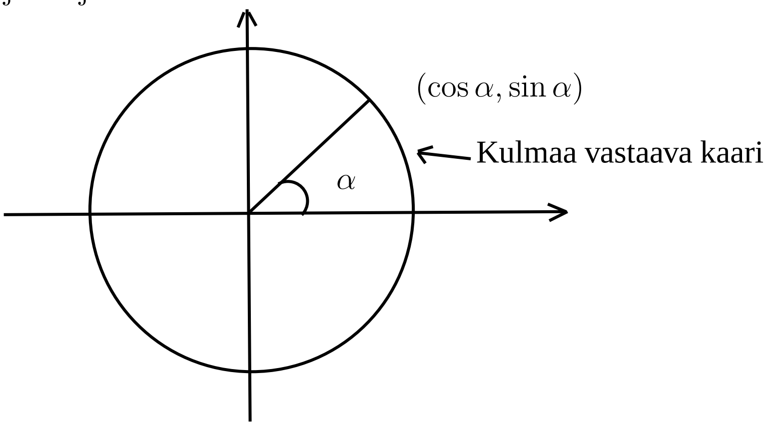
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Tämä käyrä on karteesisen tulon $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ osajoukkona relaatio, jonka lähtöjoukko ja kuvajoukko ovat molemmat $[-1, 1]$. Se ei kuitenkaan ole funktio, sillä esimerkiksi arvoa $x = 0$ vastaavat $y = -1$ ja $y = 1$. Jos rajoitutaan tarkastelu puoliympyrään, missä $x \geq 0$, voidaan x ratkaista y:n funktiona, $x = \sqrt{1 - y^2}$.
Yritetään ensin määritellä sinifunktio $\sin x$ kun ”kulma” x sijaitsee $-\pi/2$ ja $\pi/2$ välillä, eli osuu juuri puoliympyrään $x = \sqrt{1 - y^2}$. Ongelmana on se, että
1) emme tiedä mitä ”kulma ”on ja
2) emme osa mitata kulmia emmekä tiedä mikä π on.

Pyritään ensin selvittämään vastausta ensimmäiseen ongelmaan. Yksi tapa määritellä kulma on ajatella se kokonaisuutena, jonka muodostavat kaksi ääretöntä sädettä, jotka molemmat alkavat samasta pisteestä. Näitä säteitä sanotaan kulman kyljeksi. Tämän määritelmän huonona puolena on se, että se ei erota kulmia, jotka saadaan toisistaan lisäämällä tai vähentämällä kokonainen määrä täysiä kierroksia (α ja $\alpha + nfrm{-}e\pi$) eikä myöskään asenna mitään eroa negatiivisen ja positiivisen kulman välillä. Sillä kuitenkin pääsemme alkuun.



Sini-funktion määritelmässä kaikki kulmat sijoitetaan alkamaan origoon, niin että toinen kylki on positiivinen x-akseli, joten sovitaan tästä alkaen, että kaikki kulmat ovat tällaista muotoa. Lisäksi rajoitumme toistaiseksi tarkastelu vain sellaisiin kulmiin, joiden kyljet pysyvät puolitasossa $\{x \geq 0\}$. Kulmia mitataan *radiaaneissa* ja kun α on kulma, sen sinin arvossa $\sin \alpha$ symboli α tarkoittaa juuri reaalilukua, joka on tämän kulman *arvo* radiaaneissa. Radiaaneissa ideana taas on se, että kulman suuruus radiaaneissa on määritelmän mukaan sen yksikköympyrän kaaren pituus, jonka kulman kyljet rajoittavat.



Tämä kaari voidaan esittää täsmällisesti parametrisoituna käyränä eli polun $\alpha_t\colon [0,t] \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\sqrt{1-t^2}, t)$. Tässä pitää olla $\sin x = t$ eli $x = \arcsin t$. Tästä syystä käännetään ongelma "ylösalaisin" - pyrimme ensin määrittelemään arcsin ja sitten kun se on määritelty, sini voidaan konstruoida sen käänteiskuvauksena (lokaalisti). Sen jälkeen sinin määritelmä laajennetaan koko reaaliakseliin. Kulman α arvo radiaaneissa x eli $\arcsin t$, kun $t \in [-1,1]$, määritellään taas käyrän α_t pituutena. Kun $t < 0$ väli $[0,t]$ tulkitaan välinä $[t,0]$ ja vastaava kulman arvo on *negatiivinen.*

Analyysin puolella annetaan täsmällinen määritelmä "käyrän pituudelle". Nimittäin käyrä tasossa $\mathbb{R}^2$ on (jatkuva) kuvaus $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Koska tämän kuvauksen maalijoukko on karteesinen tulo, se voidaan kirjoittaa komponenteittain $f(t) = (x(t), y(t))$. Jatkuvuus tarkoittaa sitä, että x ja y ovat molemmat jatkuvia t funktioina.
Käyrän pituus määritellään samalla idealla kuin Riemannin integraali. Olkoon $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ välin $[a,b]$ äärellinen jako. Merkitään sitä D:llä Voidaan muodostaa summan

$$\ell_D = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - x(t_{i-1}))^2},$$

joka on vastaavan murtoviivan pituus. Ajatuksena on se, että mitä tiheämpi jako on, sitä parempi tämä luku approksimoi käyrän pituutta. Tästä syystä käyrän pituutta määritellään kaavalla

$$\ell = \sup\{\ell_D\},$$

missä supremum otetaan yli kaikkien jakojen D. Jos näin saadaan äärellinen luku, käyrä sanotaan olevan *suoristuva*, jolloin ℓ on sen pituus.

Analyysissa lisäksi osoitetaan, että jos yllä komponentit x ja y ovat derivoituvia, käyrän pituudelle päätee

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Sovelletaan tätä tulosta yllä konstruoituun käyrään. Pienten laskujen jälkeen saadaan arcsinille esitys

$$\arcsin t = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$t \in [-1, 1$. Tämä voidaan ottaa formaaliksi määritelmäksi kuvaukselle $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Tiedetäänhän, että kuvaus $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on jatkuva ainakin välillä $]-1,1[$, joten sen myös on oltava integroituva ja integraalifunktion oltava jatkuva ja jopa derivoituva,

$$(\arcsin(t))' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Pieniä teknisiä ongelmia aiheuttavat pisteet $t = \pm 1$. Integraalilaskennan avulla osoitetaan, että kuvauksella $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on epäoleellinen Riemann-integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

olemassa, joten $\arcsin 1$ on myös määritelty. Samalla tavalla hoidetaan piste $t = -1$. Näin saadaan jatkuva kuvaus $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ (jatkuvuus päätepisteissä osoitettavaa erikseen). Koska tällä kuvauksella on avoimella välillä $]-1,1[$ aidosti positiivinen derivaatta $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, arkussini on jopa aidosti kasvava. Erityisesti sillä on oltava olemassa käänteiskuvaus $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ (missä merkitään $\pi/2 = \arcsin(1)$). Propositiosta 140 seuraa, että sin on jatkuva. Konstruktion perusteella $\sin x$ on sellaisen kaaren $\alpha\colon [0,t] \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\sqrt{1-t^2}, t)$ päätepisteen y-koordinaatti, jonka pituus on tasan x. Kosini voidaan nyt määritellä toisena koordinaattina eli kaavalla $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Tämän jälkeen voidaan sini jatkaa ensin välille $[-\pi, \pi]$ esimerkiksi kaavoilla $\sin x = \sin(\pi - x)$, $\pi/2 \leq x \leq \pi$ ja vastaavalla tempulla välille $[-\pi, -\pi/2]$. Seuraavaksi jatketaan sini koko lukusuoralle käyttämällä 2π-jaksollisuutta. Samoin käsitellään kosinia. Konstruktio suoritetaan sillä tavalla, että näin konstruoidut sini ja kosini vastaavat perinteistä yksikköympyrä-määritelmää. Yksityiskohtia on paljon ja ne sivutetaan[16].

[16]Kelppo esitys aiheesta löytyy esimerkiksi muutenkin mainiosta teoksesta ”The Way of Analysis” (Robert S. Strichartz)

7.2 Laajennuksia, yleistyksiä ja vaihtoehtoja $\mathbb{R}$:lle

Kurssin lopuksi suoritetaan pienimuotoinen katsaus reaalilukujen systeemin yleistyksiin ja laajennuksiin.

Kompleksiluvut.
Varmasti tunnetuin ja eniten käytetty reaalilukujen laajennus on kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$.
Sen tarpeellisuus johtuu siitä, että reaalilukujen kunta ei ole *algebrallisesti suljettu*. Kunta K on algebrallisesti suljettu, jos jokaisella polynomiyhtälöllä

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$, on ainakin yksi ratkaisu $x \in K$.
$\mathbb{R}$:ssä jokaisella ensimmäisen asteen yhtälöllä $ax + b = 0$, $a \neq 0$ on ratkaisu $x = -b/a$, mutta jo yksinkertaisella toisen asteen yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisuja. Kompleksilukujen kunta syntyy luonnollisella tavalla kun yritetään laajentaa $\mathbb{R}$ isommaksi kunnaksi K, jossa ainakin yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ on ainakin yksi ratkaisu.
Oletetaan siis, että $\mathbb{R}$ on erään kunnan K alikunta ja K:ssä on alkio $i \in K$ jolle pätee $i^2 = -1$. Koska oletamme, että $\mathbb{R} \subset K$ on alikunta, sen täytyy myös sisältää ainakin alkioita muotoa $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Koska oletamme, että tutut kunnan laskusäännäöt pätevät näille, lausekkeille $a+ib, c+id$ saadaan

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + aid + i^2 bd = (ac - bd) + i(bc + ad).$$

Tämä antaa aiheen määritellä formaalisti kompleksilukujen joukko reaalilukujen parien (a, b) joukkona, eli yksinkertaisesti karteesisena tulona $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Parien joukossa määritellään yhteenlasku ja kertolasku kaavoilla

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + bd).$$

Sen jälkeen voidaan formaalisti verifioida (pitkiä, tylsiä laskuja), että $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ on kunta. Kirjaimellisesti se ei sisällä reaalilukujen joukkoa, mutta sisältyvyys $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ voidaan helposti saada aikaan sopimalla, että jokainen reaaliluku $a \in \mathbb{R}$ samastetaan kompleksiluvun $(a, 0)$ kanssa. Yllä annetun laskutoimitukset $\mathbb{C}$:ssä antavat tällöin reaaliluvuille samoja arvoja, kuin $\mathbb{R}$:n laskutoimitukset, joten $\mathbb{R}$:stä tulee $\mathbb{C}$:n alikunta.

Konstruktion perusteella ei ole vaikeata näyttää, että kompleksilukujen kunnassa jokaisella luvulla on neliöjuuri ja itse asiassa minkä tahansa kertaluvun juuri (tarkemmin - nollasta eroavalla kompleksiluvulla z on tasan n erilaista n kertaluvun juurta). Todellisuudessa pätee paljon enemmän - kunta $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu, eli jokaisella polynomiyhtälöllä

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

missä $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ on olemassa ainakin yksi ratkaisu $z \in \mathbb{C}$. Tämä tosiasia (jonka yksinkertaisinkin todistus ei ole aivan triviaali) tunnetaan nimellä **Algebran peruslause**.

Kompleksiluvut muodostavat (algebrallisesti suljetun) kunnan, mutta tämä kunta ei enää ole järjestetty. Tämä on hinta jonka joutuu maksamaan algebrallisesta sulkeneisuudesta. Nimittäin järjestetyssä kunnassa jokainen alkio, joka on toisen alkion neliö on vältämättä ei-negatiivinen (merkkisääntöjen seuraus). Mutta kompleksilukujen kunnassa jokainen alkio on toisen alkion neliö (koska jokaisella alkiolla on neliöjuuri), joten jos se olisi voinut järjestää kuntana, siinä kaikki alkiot olisivat ei-negatiivisia, mikä on vastoin järjestetyn kunnan aksioomia.

Kompleksitasossa voidaan kehittää rikas ja erittäin käyttökelpoinen analyysi, joka on tavallaan paljon "säännöllisempi" kuin reaalianalyysi. Esimerkiksi jos kuvaus $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on derivoituva, niin se on äärettömän kertaa derivoituva ja jopa analyyttinen (eli voidaan esittää Taylorin sarjana). Kuvauksille $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tällainen ei yleensä päde - jos se on derivoituva, se ei välttämättä ole derivoituva toisen kerran. Ja vaikka se olisi derivoituva äärettömän monta kertaa, sitä ei silti välttämättä voida esittää Taylorin sarjana.

Epästandardi analyysi ja hyperreaaliluvut.

Newton ja Leibniz kehittivät differentiaali- ja integraalilaskentaa 1600-luvulla, kun mitään täydellisyysaksioomia, joukko-oppia, epsilon-delta määritelmiä ja reaalilukujen aksiomaattista määritelmää vielä ollut olemassakaan. Siihen aikaan matemaattisille objekteille ei ollut vielä kehitetty mitään perustaa, joten niitä käsiteltiin "intuitioon" pohjalta.
Raja-arvoja, jatkuvuutta ja derivaattoja käsiteltiin ja laskettiin naiivisti, usein turvautumalla sellaisiin epämääräisin käsitteisiin kuin "infinitesimaaliluku". Infinitesimaaliluku on positiivinen mutta "äärettömän pieni" luku, joka on pienempi kuin kaikki "oikeat" posiitiviset reaaliluvut, mutta silti positiivinen (niin, että sillä voi esimerkiksi jakaa).

Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ derivaattaa Leibniz laski näin - olkoon dx infinitesimaali. Tällöin

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx + dx^2}{dx} = 2x + dx = 2x,$$

missä viimeisessä yhtälössä asetetaan $dx = 0$ ”koska se on äärettömän pieni”. Tällaista argumentointia (josta nykyajan yliopiston opiskelija saisi ”hylätyn” arvosanan) käyttämällä aikoinaan johdettiin ja kehitettiin käytännössä koko klassinen analyysi. Ennen pitkään kuitenkin jouduttiin myöntämään sen, mikä nykyään tuntuu itsestään selvältä - infinitesimaalien käytöllä ei ole turvallista matemaattista pohjaa, joten niitä ajettiin pakoon ja korvattiin täsmällisillä epsilon-delta tyyllisillä määritelmillä. Peruste tälle oli selvä - määritelmän mukaan infinitesimaalin pitää olla itseisarvoltaan äärettömän pieni, mutta kuitenkin positiivinen, mutta ei sellaisia otuksia reaalilukujen joukosta löydy. Näytti siltä, että infinitesimaalit hylättiin lopullisesti ja ne jäivät menneisyyteen kuten alkemia tai eetteri.

Yllättäen 1960-luvulla amerikkalainen matemaatikko Abraham Robinson onnistui herättämään äärettömän pieniä lukuja henkiin, osoittamalla, että voidaan konstruoida reaalilukujen kunnan laajennus $^*\mathbb{R}$ (hyperreaaliluvut), joka sisältäisi tavallisten reaalilukujen lisäksi myös infinitesimaalisia lukuja sekä ”äärettömän isoja” lukuja. Tässä laajennuksessa klassisia analyysin tuloksia voidaan käsitellä ja todistaa kutakuinkin samalla tavalla kuin Lebniz ja muut tekivät aikoinaan.

Täsmällisempi kuvaus systeemistä $^*\mathbb{R}$ on seuraava. $^*\mathbb{R}$ on järjestetty kunta, joka sisältää $\mathbb{R}$ alikuntana. Sen alkioita sanotaan hyperreaaliluvuiksi Reaalilukujen summa, tulo ja järjestys $^*\mathbb{R}$:ssä näyttävät samoilta kuin $\mathbb{R}$:ssä. Kunnassa $^*\mathbb{R}$ on olemassa ainakin yksi alkio $\varepsilon \neq 0$ jolle pätee

$$|\varepsilon| < r \text{ kaikilla } r \in \mathbb{R}, r > 0.$$

(tässä itseisarvo määritellään kuten järjestetyssä kunnassa yleensä). Tällaisia hyperreaalilukuja sanotaan *infinitesimaaleiksi.* Koska $^*\mathbb{R}$ on järjestetty kunta, yhdenkin infinitesimaalin olemassaolo implikoi, että on hyvin paljon (itse asiassa ääretön määrä) erilaisia infinitesimaaleja - esimerkiksi $-\varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon^2$ ovat kaikki (erilaisia!) infinitesimaaleja. Koska $\varepsilon \neq 0$, sillä on käänteisluku $N = 1\varepsilon$. Helposti nähdään, että tälle luvulle puolestaan pätee

$$|N| > r \text{ kaikilla } r \in \mathbb{R}.$$

Tällaisia hyperreaalilukuja sanotaan *äärettömiksi.* Erityisesti N on luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ joukon yläraja kunnassa $^*\mathbb{R}$, joten hyperreaalilukujen kunta ei ole Arkhimideen.

Kahden reaaliluvun välistä etäisyyttä mitataan, kuten reaalilukujenkin tapauksessa, itseisarvon avulla. Jos $|x-y|$ on infinitesimaaliluku, sanotaan, että hyperreaaliluvut ovat *äärettömän lähellä toisiaan*. Luku x on *äärellinen* jos löytyy reaaliluku $r \in \mathbb{R}$ siten, että $|x| < r$. Voidaan osoittaa, että jokaiselle äärelliselle hyperreaaliluvulle on olemassa yksikäsitteinen reaaliluku $r \in \mathbb{R}$ siten, että x on äärettömän lähellä r. Tätä lukua sanotaan x:n *varjoksi* tai standardiksi osaksi ja merkitään $\mathrm{sh}(x)$. Jokainen äärellinen hyperreaaliluku voidaan siis esittää muodossa $x = \mathrm{sh}(x) + \varepsilon$, missä $\mathrm{sh}(x) \in \mathbb{R}$ ja ε on infinitesimaaliluku. Voidaan siis ajatella, että jokainen reaaliluku r varustetaan laajennuksessa $^*\mathbb{R}$ "pilvellä", joka koostuu luvuista $r + \varepsilon$, missä ε on äärettömän pieni.

Käyttämällä hyperreaalilukuja voidaan määritellä tuttuja analyysin käsitteittä uudestaan Lebniz-old-school-style. Esimerkiksi jatkuvuus voidaan määritellä seuraavasti - f on jatkuva pisteessä x jos $f(x)$ on äärettömän lähellä $f(y)$ aina kun x on äärettömän lähellä $f(y)$. Tässä määritelmässä kuitenkin y:n pitää sallia olla mielivaltainen hyperreaaliluku, joten pitää ensin määritellä $f(y)$. Toisin sanoen pitää osata laajentaa mielivaltainen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktioksi $f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Tällainen kanoninen konstruktio on standardianalyysissa annettu.

Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivaatta $f'(x)$ määritellään kaavalla

$$f'(x) = \mathrm{sh}(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}),$$

missä ε on mielivaltainen inifinitesimaali. Tässä tietenkin edellytetään, että hyperreaaliluvun $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ varjo on sama kaikilla inifinitesimaaliluvulla ε (tässä epästandardianalyysi eroaa Lebnizin tyylistä, koska Lebniz käytti vain yhtä ja samaa infinitesimaalia). Voidaan osoittaa, että tällä tavalla määritelty derivaatta on olemassa jos ja vain jos se on olemassa standardin raja-arvomääritelmän mielessä. Lisäksi se antaa tällöin saman arvon derivaatalle. Tämän lähestymistavan etu on siinä, että se muuttaa raja-arvotarkastelut yksinkertaisella algebrallisella laskulla kunnassa. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ derivaatta voidaan epästandardianalyysissa laskea yksinkertaisesti

$$f'(x) = \mathrm{sh}(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}) = \mathrm{sh}(\frac{x^2 + 2x\cdot\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon}) = \mathrm{sh}(\frac{2x\cdot\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon}) = \mathrm{sh}(2x+\varepsilon) = 2x.$$

Nämä tarkastelut saattavat johtaa ajatukseen, että epästandardianalyysi voisi olla helpompi kuin klassinen analyysi. Miksi sitä sitten ei oteta virralli-

sesti ”standardiksi analyysiksi”? Eikös olisi helpompaa opettaa opiskelijoita laskemaan derivaattoja näin eikä kiusata niitä vaikeilla epsilon-delta todistuksilla?
Tähän voi esittää monta erilaista vastausta. Ensinnäkin epästandardianalyysiä on paljon vaikeampaa hyväksyä intuitiivisesti - ainakin nykyiselle ihmiselle. Jos analyysin opetusta aloitetaan epästandarianalyysilla, se pitää tehdä joko aksiomattisesti tai antamalla konkreettinen hyperreaalilukujen konstruktio. Ensimmäisessä vaihtoehdossa huonona puolena on se, että tällöin hyvin paljon asioita pitää opettaa vain aksioomina, ilman todistuksia. Esimerkiksi yllä mainittu periaate, jonka mukaan jokainen $\mathbb{R}$:n kuvaus voidaan laajentaa $^*\mathbb{R}$ on erikoistapaus niin sanotusta ”siirtoperiaatteesta”, jonka mukaan kaikki ensimmäisen kertaluvun logiikassa ilmaistavissa olevat väitteet, jotka ovat tosia $\mathbb{R}$:ssä ovat tosia myös $^*\mathbb{R}$:ssä. Jos tätä periaatetta opettaa, niin se tarkoittaa sitä, että pitää ensin opettaa matemaattisen logiikan alkeita.
Toisena vaihtoehtona olisi ensin antaa jokin konkreettinen konstruktio kunnalle $^*\mathbb{R}$. Kuitenkin kaikki tällaiset konstruktiot ovat melko vaikeita, abstrakteja ja joko käyttävät $\mathbb{R}$ pohjana (mikä tarkoittaa sitä, että $\mathbb{R}$:n ominaisuuksia on tunnettavaa ensin joka tapauksessa ainakin jossakin määrin) tai nojautuvat hardcore-tasoiseen matemaattiseen logiikkaan.

p-adiset luvut.

Rationaalilukujen kunnan $\mathbb{Q}$ tavallinen itseisarvo toteuttaa ominaisuuksia

$$|q| \geq 0 \text{ ja } |q| \in \mathbb{R}, \tag{141}$$

$$|p+q| \leq |p| + |q|, p, q \in \mathbb{Q}, \tag{142}$$

$$|pq| = |p||q|, p, q \in \mathbb{Q}. \tag{143}$$

Itseisarvon avulla voidaan puhua suppenemisesta ja muun muassa Cauchyn jonoista. Koska eivät kaikki Cauchyn jonot suppene $\mathbb{Q}$:ssä, on luonnollista *täydentää* $\mathbb{Q}$ tämän itseisarvon suhteen. Näin saadaan reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$.

Rationaalilukujen kunnassa $\mathbb{Q}$ on olemassa muitakin ”itseisarvo”-kuvauksia eli *normia*, jotka toteuttavat ehtoja (141-143). Tärkeä esimerkki on niin sanottu p-adinen normi $|\cdot|_p$. Olkoon p kiinnitetty alkuluku. Jokainen rationaaliluku q voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla muodossa $q = p^k \frac{m}{n}$, missä k on kokonaisluku (voi olla nolla tai negatiivinen) ja m sekä n eivät ole jaollisia p:llä. Tällöin asetetaan

$$|q|_p = p^{-k}.$$

Tämä normi määrittelee $\mathbb{Q}$:ssä tavalliseen verrattuna erillaisen suppenemiseen, jossa a ja b ovat lähellä jos $|p-q|$ on "pieni". Itseisarvon avulla voidaan puhua suppenemisesta ja Cauchyn jonoista. Osoittautuu, että $\mathbb{Q}$ ei ole täydellinen Cauchyn mielessä tämänkin normin suhteen. Näin ollen se on luonnollista täydentää. Täydentäminen voidaan tehdä samalla periaatteella kuin reaalilukujen konstruktio Cauchyn jonoilla. Täydentämisen jälkeen saadaan niin sanottu p-adisten lukujen kunta $\mathbb{Q}_p$. Se on täydellinen Cauchyn mielessä ja, kuten $\mathbb{R}$ laajentaa rationaalilukujen kunna $\mathbb{Q}$, mutta se näyttää hyvin erilaiselta kuin $\mathbb{R}$.
Esimerkiksi $\mathbb{Q}_p$:ssä jono p^n suppenee kohti nollaa. Ääretön geometrinen sarja

$$1+p+p^2+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}p^i$$

taas suppenee kohti lukua $1/(1-p)$ (vertaa geometrisen sarjaan $\mathbb{R}$:ssä). p-addisessa maailmassa monet tutut mielikuvat "pienistä" ja "suurista" suureista ikään kuin kääntyvät ylösalaisin.

Esimerkiksi $\mathbb{R}$:ssä kantaluvun p järjestelmässä jokainen reaaliluku voidaan esittää sarjana

$$\sum_{-\infty}^{i=k}\frac{n_i}{p^i}.$$

Reaalilukujen desimaaliesityksille on ominaista juuri se, että niissä kantaluvun potenssit p^i voivat saada mielivaltaisen pieniä arvoja, mutta ei mielivaltaisen suuria.
p-adisille luvuille voidaan kehittää samanlainen desimaaliesitys-teoria, paitsi että siinä tapahtuu juuri päinvastaista - jokainen p-adinen luku voidaan esittää sarjana

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{n_i}{p^i},$$

missä $k\in\mathbb{Z}$. Tässä siis potenssit p^i voivat kasvaa mielivaltaisen suuriksi, mutta ei mielivaltaisen pieniksi. Seurauksena tästä nähdään, että $\mathbb{Q}_p$ sisältää "äärettömän isoja lukuja" eli ei ole Arkhimedeen (varoitus: $\mathbb{Q}_p$ ei ole järjestetty kunta, joten siinä Arkhmideen ehto testataan eri tavalla - normin avulla). Voidaan siis ajatella, että siinä missä reaaliluvut saadaan rationaalilukujen äärellisistä desimaalikehitelmistä

$$n,k_1k_2\ldots k_n$$

lähtemällä ”oikealle”, p-addiset luvut taas saadaan tällaisesta kehitelmästä sallimalla äärettömän pitkän lisäyksen vasemmalla.

p-adisten lukujen kunnassa voidaan tehdä analyysiä, mutta se on hyvin erilaista kuin klassinen analyysi $\mathbb{R}$:ssä eikä teoria ole niin rikas. Osittain tämä johtuu siitä, että $\mathbb{Q}_p$ on topologisesti täysin epäyhtenäinen, eli hyvin ”reikäinen”. p-adisilla luvuilla on kuitenkin paljon sovelluksia algebrassa, lukuteoriassa sekä topologiassa.