6 Reaalilukujen konstruktio

Tässä luvussa esitetään kaksi erilaista tapaa konstruoida reaalilukujen joukko. Molemmat tavat ovat ”klassisia” ja molempiin kannattaa tutustua, koska ne yleistyvät muihin matemaattisiin konteksteihin. Dedekindin leikkauksiin perustuva tapa on hyödyllinen yleisesti järjestettyjen joukkojen teoriassa. Cauchy-jonoihin perustuvia konstruktioita taas sovelletaan analyysin ja topologian puolella.

6.1 Dedekindin leikkaukset

Koska $\mathbb{Q}$ on järjestetty kunta, siinä voidaan määritellä tavalliseen tapaan relaatioita $\geq$ (suurempi tai yhtä kuin), $<$ (pienempi kuin), $>$ (suurempi kuin). Käytämme jatkossa näiden relaatioiden ominaisuuksia, jotka seuraavat helposti määritelmistä ja alkuperäisen järjestysrelaation $\leq$ ominaisuuksista. Erityisesti relaatio $<$ toteuttaa seuraavia ominaisuuksia.

(i) Olkoot $q, r \in \mathbb{Q}$. Tällöin täsmälleen yksi seuraavista väitteistä pätee:
$$q < r \text{ tai } q = r \text{ tai } q < r.$$

(ii) Olkoot $q, r, s \in \mathbb{Q}$. Jos $q < r$ ja $r < s$, niin $q < s$ (*transitiivisuus*).

(iii) Olkoot $q, r, s \in \mathbb{Q}$. Jos $q < r$, niin $q + s < r + s$.

(iv) Olkoot $q, r, s \in \mathbb{Q}$. Jos $q < r$ ja $s > 0$, niin $qs < rs$.

(v) Olkoot $q, r \in \mathbb{Q}$ ja oletetaan, että $q < r$. Tällöin on olemassa $s \in \mathbb{Q}$ siten, että $q < s < r$.

Näistä ominaisuuksia (i)-(ii) tarkasteltiin jo yleisemmin järjestettyjen joukkojen kontekstissa aikaisemmin Lemmassa 50. Ominaisuudet (iii)-(v) taas todistetaan järjestetyn kunnan aksioomista lähtien aivan samalla tavalla kuin reaalilukujen tapauksessa (kts. Lemma 5 ja Lemma 7).

Pohdinta.
Leikitään hetkellisesti, että meillä on joku reaalilukujen osajoukko $\mathbb{R}$ ja olkoon $x \in \mathbb{R}$ jokin reaaliluku. Tarkastellaan rationaalilukujen osajoukon
$$A_x = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Lemman 109 nojalla pätee $x = \sup A_x$. Jos $x < y$, niin saman Lemman 108 nojalla on olemassa rationaaliluku $r \in \mathbb{Q}$ jolle $x < r < y$, joten $r \in A_y$, mutta $r \notin A_x$. Erityisesti kuvaus $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $x \mapsto A_x$ on injektio. Lisäksi $x \leq y$

jos ja vain jos $A_x \subset A_y$, joten tämä kuvaus on järjesttyjen joukkojen välinen monomorfismi. Tässä joukossa $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ käytetään järjestyksenä joukkojen välistä sisältyvyysrelaatiota $\subset$.
Tämä havainto antaa idean koodata reaalilukuja tietynlaisina $\mathbb{Q}$:n osajoukkoina. Helposti havaitaan, että joukot A_x ovat epätyhjiä aitoja $\mathbb{Q}$:n osajoukkoja. Lisäksi ne ovat ideaaleja järjestysrelaation suhteen - jos $q \in A_x$ ja $q' < q$, niin myös $q' \in A_x$. Lisäksi joukossa A_x ei ole suurinta alkiota, sillä $\mathbb{Q}$ on tiheässä $\mathbb{R}$:ssä.

Ottamalla näitä ominaisuuksia formaalin konstruktion lähtökohdaksi päädytään seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 110. Dedekindin leikkaus *joukossa* $\mathbb{Q}$ *on epätyhjä aito ideaali* $\mathbb{Q}$*:n järjestysrelaation suhteen. Toisin sanoen* $D \subset \mathbb{Q}$ *on Dedekindin leikkaus, jos se toteuttaa seuraavia ehtoja.*

(i) $\emptyset \neq D \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Jos $x \in D$ *ja* $y < x$, $y \in \mathbb{Q}$, *niin* $y \in D$.

Jos lisäksi joukossa D *ei ole suurinta alkiota, sanomme sen* avoimeksi Dedekindin leikkaukseksi.

Esimerkkejä 111. *1. Olkoon* $q \in \mathbb{Q}$ *rationaaliluku. Osoitetaan, että joukko*

$$\bar{D}(q) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq q\}$$

on Dedekindin leikkaus.
Koska $q \in \bar{D}(q)$, $\bar{D}(q)$ *on epätyhjä. Koska* $q+1 > q$, *niin* $q+1 \notin D$, *mistä seuraa, että* $\bar{D}(q) \neq \mathbb{Q}$.
Olkoon $a \in \bar{D}(q)$ *ja* $b \in \mathbb{Q}$, $b < a$. *Tällöin järjestyksen transitivisuuden nojalla* $b \leq q$, *joten* $b \in \bar{D}(q)$. *Joukko* $\bar{D}(q)$ *on siis ideaali.*
Joukossa $\bar{D}(q)$ *on suurin alkio - se on tietysti luku* q. *Näin ollen* $\bar{D}(q)$ *on Dedekindin leikkaus, mutta se ei ole avoin Dedekindin leikkaus.*

Jos sen sijaan tarkastellaan joukkoa

$$D(q) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < q\} = \bar{D}(q) \setminus \{q\},$$

niin $D(q)$ *on avoin Dedekindin leikkaus. Tämä seuraa suoraan Lemmasta 112 alla.*

2. Joukko

$$D = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ tai } a^2 < 2\}$$

on avoin Dedekindin leikkaus. Sitä ei voi esittää muodossa $D(q)$ tai $\bar{D}(q)$ millään $q \in \mathbb{Q}$. Molempien väitteiden verifiointi jätetään harjoitustehtäväksi. Tausta-ajatuksena on tietenkin se, että D "edustaa" luvun $\sqrt{2}$.

3. Olkoon D avoin Dedekindin leikkaus ja tarkastellaan sen komplimenttia $E = \mathbb{Q} \setminus D$. On olemassa kaksi mahdollisuutta - E:ssä on pienin alkio tai E:ssä ei ole pienintä alkiota. Osoitetaan, että ensimmäinen mahdollisuus toteutuu jos ja vai jos D on muotoa

$$D(q) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < q\}$$

jollakin $q \in \mathbb{Q}$. Selvästi joukossa $\mathbb{Q} \setminus D(q)$ on pienin alkio - se on luku q. Kääntäen oletetaan, että $q \in \mathbb{Q}$ on joukon $\mathbb{Q} \setminus D$ pienin alkio. Olkoon $a \in D$. Tällöin $a < q$, sillä jos $a \geq q$, niin $q \in D$, koska D on ideaali. Näin ollen $a \in D(q)$, joten $D \subset D(q)$. Kääntäen oletetaan, että $a < q$. Koska q on pienin alkio joukossa $\mathbb{Q} \setminus D$ ja a on pienempi kuin q, a ei voi olla joukon $\mathbb{Q} \setminus D$ alkio. Näin ollen $a \in D$. Olemme näyttäneet, että $D(q) \subset D$. Väite on todistettu.

Pohdinta-sektiossa yllä olemme huomanneet, että Dedekindin leikkaukset ainakin intuition pohjalta kelpaisivat reaalilukujen konstruktion lähtökohdaksi. Ideana on tietysti määritellä reaaliluku Dedekindin leikkauksena. Kuitenkin tällöin muotoa $\bar{D}(q)$ oleva ei-avoin leikkaus edustaisi samaa rationaalilukua kuin vastaava avoin leikkaus $D(q)$. Tästä syystä reaaliluvuiksi kelvataan vain avoimia Dedekindin leikkauksia. Kuitenkin konstruktioissa ja todistuksissa ajoittain törmäämme myös (mahdollisesti) ei-avoimiin leikkauksiin, joten esitettään seuraava operaatio.
Olkoon D Dedekindin leikkaus. Merkitään D^0:llä joukkoa, joka saadaan kun D:stä poistetaan sen suurin alkio, jos sellainen löytyy. Toisin sanoen, jos leikkauksella ei ole suurinta alkiota, asetetaan $D^0 = D$. Jos taas leikkauksella on suurin alkio q, asetetaan $D^0 = D \setminus \{q\}$. Näytetään, että tällä operaatiolla saadaan vain avoimia Dedekindin leikkauksia.

Lemma 112. *Olkoon D Dedekindin leikkaus. Tällöin D^0 on avoin Dedekindin leikkaus.*

Todistus. Jos D on avoin, $D^0 = D$ on avoin.
Oletetaan, että D:llä on olemassa suurin alkio $q \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$D^0 = D \setminus \{q\}.$$

Koska $q - 1 < q$, D^0 on epätyhjä. Koska $q \notin D^0$, se on aito osajoukko. Olkoon $r \in D^0$ ja $r' < r$. Tällöin $r' < r < q$, joten $r' < q$. Erityisesti $r' \leq q$ ja $r' \neq q$. Ensimmäisestä ehdosta seuraa, että $r' \in D$ (sillä D on ideaali), jolloin toisen ehdon nojalla nähdään, että itse asiassa $r' \in D^0$. D^0 on siis ideaali.

Osoitetaan, että D^0:ssä ei ole suurinta alkiota. Olkoon $r \in D^0$. Tällöin $r < q$. On olemassa rationaaliluku s siten, että $r < s < q$. Alkio s kuuluu joukkoon D^0 ja $r < s$. Näin ollen r ei voi olla suurin alkio D^0:ssä. □

Lemma 113. *Olkoon $D \subset \mathbb{Q}$ Dedekindin leikkaus. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}$ siten, että $a \in D, b \notin D$. Tällöin*

$$a < b.$$

Erityisesti jokainen Dedekindin leikkaus on rajoitettu ylhäältä.

Todistus. HT □

Seuraava Dedekindin leikkausten ominaisuus on oleellinen reaalilukujen konstruktion kannalta. Huomaa erityisesti, että sen todistuksessa käytetään rationaalilukujen Arkhimedeen ominaisuutta. Itse asiassa ainoat $\mathbb{Q}$:n ominaisuudet, joita tarvitaan reaalilukujen konstruoimiseen ovat se, että $\mathbb{Q}$ on Arkhimedeen järjestetty kunta. Otamme $\mathbb{Q}$ reaalilukujen konstruktion lähtökohdaksi vain konkreettisuuden ja perinteen vuoksi, sekä siitä syystä, että tiedämme $\mathbb{Q}$:n olevan olemassa edellisen luvun perusteella. Yhtä hyvin reaalilukujen konstruktio onnistuu lähtemällä mistä tahansa Arkhimedeesta kunnasta. Se sijaan ei-Arkhimedeen kunta ei voi upottaa reaalilukujen joukkoon. Tähän palataan myöhemmin $\mathbb{R}$:n konstruktion jälkeen.

Propositio 114. *Olkoon $D \subset \mathbb{Q}$ Dedekindin leikkaus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen positiivinen rationaaliluku.*
Tällöin on olemassa $a \in D$ ja $b \notin D$ siten, että

$$0 < b - a < \varepsilon.$$

Todistus. Koska $\emptyset \neq D$, voidaan valita $x \in D$. Tarkastellaan joukkoa

$$S = \{x + n\varepsilon/2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Osoitetaan, että S ei ole D:n osajoukko. Tehdään vasta-oletus ja oletetaan, että $S \subset D$. Tällöin edellisen Lemman nojalla on olemassa $m \notin D$ siten, että $s < m$ kaikilla $s \in S$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$x + \varepsilon n/2 < m,$$

mistä seuraa

$$n < \frac{2(m-x)}{\varepsilon}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mutta tästä seuraisi, että $\mathbb{N}$ on ylhäältä rajoitettu $\mathbb{Q}$:ssä, mikä tiedetään olevan epätotta. Näin ollen S ei ole D:n osajoukko, joten on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $x+\varepsilon n/2 \notin D$. Valitaan pienin $n \in \mathbb{N}$ jolle $x+\varepsilon n/2 \notin D$ (olemassa, koska $\mathbb{N}$ on hyvinjärjestetty). Tällöin $n \neq 0$, sillä $x + r0 = x \in D$. Erityisesti tällöin $n-1 \in \mathbb{N}$ joten

$$a = x + (n-1)\varepsilon/2 \in D, b = x + \varepsilon/2 \notin D$$

ja $b - a = \varepsilon/2 < \varepsilon$.

$\square$

Tarkastellaan kaikkien $\mathbb{Q}$:n **avointen** Dedekindin leikkausten muodostamaa joukkoa. Se on potenssijoukon $\mathcal{P}\mathbb{Q}$ osajoukko ja me merkitsemme sitä (toistaiseksi) tutulla symbolilla $\mathbb{R}$. Tarkoitus olisi näyttää, että tämä joukko toteuttaa reaalilukujen määritelmän. Sitä ennen meidän pitää tietenkin konstruoida joukossa $\mathbb{R}$ laskutoimituksia $+$, $\cdot$ sekä järjestysrelaation $\leq$. Joukon $\mathbb{R}$ alkioita eli avoimia Dedekindin leikkauksia joukossa $\mathbb{Q}$ sanomme myös vapaasti "reaaliluvuiksi".

Järjestys.
Aloitetaan määrittelemällä joukossa $\mathbb{R}$ järjestysrelaation $\leq$. Se on helppoa - käytetään vain potenssijoukossa $\mathbb{Q}$ valmiiksi olevaa järjestystä. Tarkemmin, olkoot D, D' reaalilukuja eli avoimia Dedekindin leikkauksia. Asetetaan

$$D \leq D' \text{ jos ja vain jos } D \subset D'.$$

Ennen kuin mennään tämän järjestyksen ominaisuuksien tarkasteluun, upotetaan valmiiksi rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ reaalilukujen joukkoon. Myöhemmin nähdään, että tämä upotus tulee olemaan kanoninen upotus $\tilde{h}$ (kts. Lemma 106).
Olkoon $q \in \mathbb{Q}$. Asetetaan

$$i(q) = D(q) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < q\}.$$

Esimerkissä 111 yllä olemme jo näyttäneet, että $D(q)$ on avoin Dedekindin leikkaus. Näin ollen kuvaus $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ on hyvin määritelty. Seuraavassa Propositiossa näytämme, että i on injektio ja itse asiassa säilyttää järjestysrelaation. Myöhemmin näytämme, että se säilyttää myös yhteen-ja kertolaskun (sitten kun sellaisia reaaliluvuille määritellään).

Propositio 115. *Relaatio $\leq$ on täysi järjestys joukossa $\mathbb{R}$. Lisäksi $(\mathbb{R}, \leq)$ on täydellinen, siinä mielessä, että jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla osajoukolla $A \subset \mathbb{R}$ on olemassa pienin yläraja $\sup A$ joukossa $\mathbb{R}$.*

Kuvaus $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $i(q) = D(q)$ on injektio. Lisäksi jos $q \leq r$ joukossa $\mathbb{Q}$, niin $i(q) \leq i(r)$.

Todistus. Joukkojen sisältyvyysrelaatio on refleksiivinen, anti-symmetrinen ja transitiivinen aina (kts. Esimerkki 48), joten $\leq$ on ainakin osittainen järjestys. Osoitetaan, että se on täysi järjestys. Olkoot D, E reaalilukuja ja oletetaan, että $D \not\subseteq E$. Osoitetaan, että tällöin välttämättä $E \subset D$.
Koska D ei ole E:n osajoukko, on olemassa $q \in D$, $q \notin E$. Koska E on Dedekindin leikkaus, Lemman 113 nojalla kaikilla $e \in E$ pätee $e < q$. Mutta $q \in D$ ja D on ideaali, joten kaikilla $e \in E$ pätee $e \in D$. Toisin sanoen $E \subset D$.

Olkoot $q, r \in \mathbb{Q}$, $q < r$. Tällöin kaikilla $a \in D(q)$ pätee $a < q < r$, joten transitiivisuuden nojalla $a < r$ eli $a \in D(r)$. Toisin sanoen $D(q) \subset D(r)$. Lisäksi on olemassa rationaaliluku $s \in \mathbb{Q}$ siten, että $q < s < r$. Tällöin $s \notin D(q)$ mutta $s \in D(r)$. Näin ollen $D(q) \subset D(r)$ ja $D(q) \neq D(r)$. Tästä seuraa sekä kuvauksen i injektivisyys sekä ominaisuus $i(q) \leq i(r)$ kun $q \leq r$.

Osoitetaan täydellisyys. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä. Olkoon D jokin A:n yläraja. Määritelmien nojalla tämä tarkoittaa sitä, että $E \subset D$ jokaisella avoimella Dedekindin leikkauksella $E \in A$. Muodostetaan joukko

$$C = \bigcup A \subset \mathbb{Q}.$$

Riittää näyttää, että
a) C on reaaliluku eli avoin Dedekindin leikkaus.
b) $C = \sup A$.

a) Koska A on epätyhjä, on olemassa $E \in A$, jolloin $\emptyset \neq E \subset C$. Tästä seuraa, että C on epätyhjä. Toisaalta $E \subset B$ kaikilla $E \in A$, joten myös $C \subset B$. Koska $B \neq X$ Dedekindin leikkauksena, myös C ei voi olla koko joukko $\mathbb{Q}$.
Osoitetaan, että C on ideaali. Olkoon $q \in C$ ja $r < q$. Koska $q \in C$, on olemassa $E \in C$ siten, että $q \in E$. Mutta E on ideaali, joten $r \in E \subset C$. Erityisesti $r \in C$, joten C on ideaali.
Osoitetaan, että C:ssä ei ole suurinta alkiota. Olkoon $q \in C$. Tällöin on olemassa $E \in C$ siten, että $q \in E$. Koska E:ssä ei ole suurinta alkiota, on olemassa $q' \in E$ jolle $q < q'$. Tällöin myös $q' \in C$. Koska $q < q'$, q ei voi olla

C:n suurin alkio.

b) Koska $E \subset C$ kaikilla $E \in A$, reaaliluku C on A:n yläraja. Olkoon B' mikä tahansa yläraja A:lle. Tällöin järjestysrelaation määritelmän mukaan $E \subset B'$ kaikilla E, joten myös

$$C = \bigcup_{E \in A} E \subset B'.$$

Näin ollen $C \leq B'$ kaikille A:n ylärajoille B', joten C on ylärajoista pienin. $\square$

Huomaa erityisesti, että olemme todistaneet, että $\mathbb{R}$ toteuttaa täydellisyysaksiooman.

Yhteenlasku. Olkoot D, E avoimia Dedekindin leikkauksia joukossa $\mathbb{Q}$. Asetetaan

$$D + E = \{x + y \mid x \in D, e \in E\}.$$

Jotta tämä konstruktio määrittelisi yhteenlaskun joukossa $\mathbb{R}$, pitäisi ensin osoittaa, että tällä tavalla määritelty joukko $D + E$ on myös reaaliluku, eli avoin Dedekindin leikkaus.

Lemma 116. *Olkoot $D, E \in \mathbb{R}$. Tällöin $D + E \in \mathbb{R}$.*
Olkoot $q, r \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$D(q) + D(r) = D(q + r).$$

Todistus. Koska D ja E ovat epätyhjät, on olemassa $x \in D, y \in E$. Tällöin $x + y \in D + E$, joten $D + E$ on myös epätyhjä.
Lemman 113 nojalla on olemassa $a, b \in \mathbb{Q}$ siten, että, $x < a$ ja $y < b$ kaikilla $x \in D, y \in E$. Tällöin kaikilla $x \in D, y \in E$

$$x + y < a + b.$$

Erityisesti $a + b \notin D + E$, joten $D + E \neq \mathbb{Q}$.

Osoitetaan, että $D + E$ on ideaali. Olkoot $x \in D, y \in E$, olkoon $q \in \mathbb{Q}$ ja oletetaan, että $q < x + y$. Tällöin $q - y < x$, joten, koska D on ideaali, $q - y \in D$. Mutta tällöin

$$q = (q - y) + y \in D + E.$$

Lopuksi osoitetaan, että joukolla $D + E$ ei ole suurinta alkiota. Olkoon $a = x + y \in D + E$, missä $x \in D, y \in E$. Koska x ei ole D:n suurin alkio ja y

ei ole E:n suurin alkio, on olemassa $x' \in D, y' \in E$, siten, että $x < x', y < y'$. Tällöin
$$a = x + y < x' + y' \in D + E.$$
Erityisesti mikään $D + E$:n alkio ei ole sen suurin alkio.
Olemme näyttäneet, että $D + E$ on avoin Dedekindin leikkaus. Yhteenlasku on siis hyvin määritelty $\mathbb{R}$:ssä.

Olkoot $q, r \in \mathbb{Q}$. Jos $a < q$ ja $b < r$, niin $a + b < q + r$. Tästä seuraa suoraan, että
$$D(q) + D(r) \subset D(q + r).$$
Kääntäen, olkoon $a \in D(q+r)$ eli $a < q+r$. Tällöin $a-r < q$. Koska kahden rationaaliluvun välistä löytyy kolmas rationaaliluku, on olemassa $s \in \mathbb{Q}$ jolle $a-r < s < q$. Olkoon $r' = a-s$. Tällöin $s = a-r'$. Koska $a-r < a-r'$, pätee $r' < r$. Nyt $r' \in D(r)$ ja $a-r' = s \in D(q)$, joten $a = r'+(a-r') \in D(q)+D(r)$. Näin ollen
$$D(q + r) \subset D(q) + D(r).$$
□

Edellisen lemman nojalla yhteenlasku + on hyvin määritelty $\mathbb{R}$:ssä. Lisäksi kanoninen upotus $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ säilyttää yhteenlaskun, kaikilla $q, r \in \mathbb{Q}$ pätee
$$i(q + r) = i(q) + i(r).$$

Seuraavaksi osoitetaan, että yhteenlasku toteuttaa reaalilukujen aksiomia A(i)-(iv) ja E(i).

Propositio 117. *Olkoot D, E, F mielivaltaisia reaalilukuja. Tällöin*

A(i) $D + E = E + D$.

A(ii) $(D + E) + F = D + (E + F)$.

A(iii) *Olkoon* $0 = D(0)$. *Tällöin* $D + 0 = D = 0 + D$.

A(iv) *On olemassa alkio* $-D$ *siten, että* $D + (-D) = 0 = D(0)$.

E(i) *Jos* $D \le E$, *niin* $D + F \le E + F$.

Todistus. Aksioomat A(i) ja A(ii) seuraavat suoraan vastaavista ominaisuuksista $\mathbb{Q}$:ssä, sillä
$$D + E = \{x + y \mid x \in D, y \in E\} = \{y + x \mid y \in E, x \in D\} = E + D,$$
$$(D + E) + F = \{(x + y) + z \mid x \in D, y \in E, z \in F\} =$$

$$= \{x + (y + z) \mid x \in D, y \in E, z \in F\} = D + (E + F).$$

Olkoon D mielivaltainen avoin Dedekindin leikkaus. Olkoon $q \in D$ ja $r \in D(0)$. Tällöin $r < 0$, joten $q + r < q \in D$. Näin ollen $D + D(0) \subset D$.
Kääntäen olkoon $q \in D$. Koska D:ssä ei ole suurinta alkiota, on olemassa $q' \in D, q' > q$. Nyt $r = q - q' < 0$, joten $r \in D(0)$. Lisäksi $q = q' + r \in D + D(0)$.
Näin ollen $D + D(0) = D$ kaikilla $D \in \mathbb{R}$.

Seuraavaksi osoitetaan vasta-alkion olemassaoloa. Määritellään

$$D^* = \{-x \mid x \in D\}, E = \mathbb{Q} \setminus D^*.$$

D^* siis koostuu kaikista D:n vasta-alkioista ja E on tämän joukon D^* komplementti $\mathbb{Q}$:ssä. Pannaan merkille (tarkista!), että $x \in D^*$ jos ja vain jos $-x \in D$ ja vastaavasti $y \in E$ jos ja vain jos $-y \notin E$.
Osoitetaan, että E on Dedekindin leikkaus (ei välttämättä avoin). Joukko D^* on epätyhjä (koska D on epätyhjä). Lisäksi on olemassa $a \notin D$, jolloin helposti nähdään (vasta-oletuksen kautta), että $-a \notin D^*$, joten $D^* \neq \mathbb{Q}$. Koska $E = \mathbb{Q} \setminus D^*$, näistä seuraa, että

$$\emptyset \neq E \neq \mathbb{Q}.$$

Seuraavaksi näytetään, että E on ideaali. Olkoon $a \in E$ ja olkoon $b < a$. Tehdään vasta-oletus - $b \notin E$. Tällöin $b \in D^*$, joten $b = -x$ jollakin $x \in D$. Koska $-x < a$, niin $-a < x$. Koska $x \in D$ ja D on ideaali, $-a \in D$, jolloin $a \in D^*$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä $a \in E = \mathbb{R} \setminus D^*$. Väite on todistettu.
Joukko E on siis Dedekindin leikkaus. Se ei välttämättä ole avoin, itse asiassa jos D on muotoa $D(q)$, niin E:llä on tällöin suurin alkio $-q$. Tästä syystä asetetaan $-D = E^0$. Lemman 112 nojalla $-D$ on reaaliluku. Osoitetaan, että $D + (-D) = 0$. Olkoon $x \in D, y \in -D$. Osoitetaan, että $x + y \in D(0)$ eli $x + y < 0$. Tehdään vasta-oletus, olkoon $x + y \geq 0$. Tällöin erityisesti $-y \leq x$. Koska D on ideaali ja $x \in D$, tämä implikoi sen, että $-y \in D$. Mutta tällöin $y = -(-y) \in D^*$. Toisaalta $y \in -D \subset E$ ja $E \cap D^* = \emptyset$. Saadaan ristiriita. Näin ollen $x + y < 0$. Tämä osoittaa sen, että

$$D + (-D) \subset D(0) = 0.$$

Kääntäen olkoon $r \in D(0)$, eli $r < 0$. Tällöin $-r > 0$, joten Lemman 114 nojalla on olemassa $x \in D$, $y \notin D$ joille $0 < y - x < -r$ eli $r < x - y = x + (-y)$. Koska $y \notin D$, tästä seuraa, että $-y \notin D^*$, joten $-y \in E$. Seuraavaksi haluamme päätellä, että $-y \in -D$. Voi käydä niin, että $-y$

on E:n suurin alkio, jolloin tämä ei päde. Mutta tämä tekninen ongelma on helppo korjata. Nimittäin, koska pätee $r - x < -y$, voidaan valita $u \in \mathbb{Q}$ siten, että $r - x < u < -y$. Tällöin $u \in E$ (koska E on ideaali) ja $u < -y$, joten u ei ole E:n suurin alkio. Näin ollen $u \in -D$. Lisäksi pätee $r < x + u$, missä $x \in D$ ja $u \in -D$, joten $z = x + u \in D + (-D)$. Tiedämme jo, että $D + (-D)$ on avoin Dedekindin leikkaus, erityisesti ideaali, ja koska $r < z$, tästä seuraa, että $r \in D + (-D)$. Olemme näyttäneet, että

$$0 = D(0) \subset D + (-D).$$

Yhdistämällä tämä aikaisemmin todistettuun, saadaan $D + (-D) = 0$, mitä pitikin todistaa.

Ominaisuus E(i) seuraa suoraan järjestysrelaation määritelmästä, koska jos $D \subset E$, niin

$$D + F = \{x + y \mid x \in D, y \in F\} \subset E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}.$$

$\square$

Soveltamalla Lemman 115 tietoja juuri löydettyyn yhteenlaskun neutraalialkioon $D(0) = 0$ nähdään, että jokaiselle reaaliluvulle D pätee tasan yksi seuraavista ehdoista,

$$D > 0 \text{ tai } D = 0 \text{ tai } D < 0.$$

Reaalilukuja, jolle $D > 0$ sanotaan luonnollisesti positiivisiksi. Vastaavasti negatiivinen reaaliluku on luku D jolle $D < 0$.

Huomaa, että Dedekindin leikkauksena reaaliluku D on positiivinen jos ja vain jos on olemassa positiivinen rationaaliluku $q > 0$ siten, että $q \in D$.

Koska jokaisella reaaliluvulla E osoitettiin olevan vasta-alkio $-E$, voimme nyt määritellä vähennyslaskun tavalliseen tapaan kaavalla $D - E = D + (-E)$. Koska alkio D toteuttaa alkion $-D$ vasta-alkion määritelmän, on voimassa kaava

$$-(-D) = D.$$

Samoin, koska $D + E$ toteuttaa alkion $-D - E = (-D) + (-E)$ vasta-alkion määritelmän, on voimassa kaava

$$-(D + E) = -D - E.$$

Kertolasku.

Reaalilukujen kertolaskun määritelmä ei ole niin suoraviivainen ja yksinkertainen, kuin yhteenlaskun määritelmä. Jos D, E ovat Dedekindin leikkauksia, niin emme voi asettaa

$$DE = \{xy \mid x \in D, y \in E\},$$

koska tämä joukko ei itse asiassa koskaan tule olemaan Dedekindin leikkaus. Tämä johtuu siitä, että sekä D, että E sisältävät mielivaltaisen pieniä negatiivisia rationaalilukuja, mutta kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen, joten joukko

$$\{xy \mid x \in D, y \in E\}$$

sisältää mielivaltaisen suuria positiivisia lukuja, erityisesti ei ole rajoitettu ylhäältä. Ei se sitten voi olla Dedekindin leikkaus.

Tästä syystä oikea määritelmä tehdään vaiheittain. Kertolasku määritellään ensin positiivisille reaaliluvuille. Olkoot $D, E > 0$. Asetetaan

$$DE = \{q \in \ \mid q \leq 0\} \cup \{xy \mid x \in D, y \in E, x, y > 0\}.$$

Seuraavassa Propositiossa näytämme virallisesti, että tällöin DE on Dedekindin leikkaus. Sen jälkeen määritelmä laajennetaan muihin tapauksiin käyttämällä "merkkisääntöjä". Jos $D < 0$ ja $E > 0$, niin $-D > 0$, joten voidaan asettaa

$$DE = -((-D)E).$$

Vastaavasti jos $D \geq 0$ ja $E < 0$, asetetaan

$$DE = -(D(-E)).$$

Jos taas $D, E < 0$ asetetaan

$$DE = (-D)(-E).$$

Jäljellä on vain tapaus $D = 0$ tai $E = 0$. Tällöin luonnollisesti määritellään $DE = 0$.

Lemma 118. *Yllä määritelty reaalilukujen kertolasku on hyvin määritelty. Lisäksi kaikilla $q, r \in \mathbb{Q}$ pätee*

$$D(qr) = D(r)D(q).$$

Todistus. Meidän pitää osoittaa, että joukko

$$DE = \{q \in \ \mid q \leq 0\} \cup \{xy \mid x \in D, y \in E, x, y > 0\}$$

on avoin Dedekindin leikkaus, jos D ja E ovat positiivisia Dedekindin leikkauksia.

Koska $0 \in DE$, DE ei ole tyhjä. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \notin D, b \notin E$. Koska $D > 0$ ja $E > 0$, molemmat joukot D ja E sisältävät joukon ei-positiivisten rationaalilukujen joukon $\{q \in \ \mid q \leq 0\}$. Erityisesti $a, b > 0$. Nyt jos $q \in \mathbb{Q}, q \leq 0$, niin $q \leq 0 < ab$. Jos taas $x \in D, y \in E$, $x, y > 0$, niin pätee $x < a$ ja $y < a$ (Lemma 113), joten $xy < ab$, koska $\mathbb{Q}$ on järjestetty kunta (kaikki tarkasteltavat luvut positiivisia, joten epäyhtälön suunta säilyy kertolaskuissa).
Erityisesti siis $r < ab$ kaikilla $r \in DE$, joten $DE \neq \mathbb{Q}$.
Seuraavaksi näytetään, että DE on ideaali. Olkoon $q \in DE$ ja olkoon $r < q$. Jos $r \leq 0$, $r \in DE$ määritelmän mukaan. Jos taas $r > 0$, myös $q > 0$, joten $q = xy$, missä $x \in D, y \in E$ ja $x, y > 0$. Nyt $0 < r < q = xy$, joten $0 < r/y < x$, mistä seuraa, että $r/y \in D$ ja $r/y > 0$. Tästä seuraa, että $r = (r/y)y \in DE$.
Lopuksi pitää näyttää, että DE:ssä ei ole suurinta alkiota. Koska $D, E > 0$, on olemassa $a \in D$, $b \in E$, $a, b > 0$. Määritelmän mukaan $ab \in DE$. Tästä seuraa, että mikään alkio $q \in DE$, jolle $q \leq 0$ ei voi olla sen suurin alkio. Jos taas $q = xy$, missä $x \in D$, $y \in E$, $x, y > 0$, niin, koska D:ssä ja E:ssä ei ole suurimpia alkioita, on olemassa $x' \in D, y' \in E$, joille $x < x', y < y'$. Nyt $xy < x'y' \in DE$. Näin ollen xy ei voi olla suurin alkio joukossa DE.

Kaavan

$$D(qr) = D(r)D(q)$$

todistaminen kaikilla $q, r \in \mathbb{Q}$ jätetään harjoitustehtäväksi. □

Ennen kuin voimme todistaa kertolaskun ominaisuuksia, tarvitsemme aputuloksia. Palautetaan mieleen, että jokaisessa kunnassa, muun muassa rationaalilukujen kunnassa voidaan määritellä potenssit q^n, $n \in \mathbb{N}$ induktiolla

$$q^0 = 1,$$
$$q^{n+1} = q^n q.$$

Lemma 119. *(***Bernoulin epäyhtälö***).*
Olkoon $a > 1$ rationaaliluku. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$a^n > 1 + n(a - 1).$$

Erityisesti, jos $q \in \mathbb{Q}$ on mikä tahansa, on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $a^n > q$.

Todistus. HT (induktiolla). □

Lemma 120. *Olkoon $D > 0$ positiivinen Dedekindin leikkaus ja olkoon $a > 1$ rationaaliluku. Tällöin on olemassa $x \in D, x > 0$ ja $y \notin D, y > 0$ siten, että*

$$y < ax.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $q \in D, q > 0$ ja $b \in \mathbb{Q}$ siten, että $1 < b < a$. Tarkastellaan joukkoa

$$S = \{qb^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Huomaa, että kaikki S.:ssä esiintyvät luvut ovat positiivisia.
Edellisestä Lemmasta seuraa helposti, että S ei ole ylhäältä rajoitettu. Koska D on ylhäältä rajoitettu, S ei voi olla D:n osajoukko. Toisaalta $q = qb^0 \in S \cap D$. Valitaan pienin indeksi $n \in \mathbb{N}$ jolle $y = qb^n \notin D$. Tällöin $n > 0$, joten $x = qb^{n-1} \in D$ ja $y = bx < ax$. □

Propositio 121. *Kaikilla $D, E, F \in \mathbb{R}$ seuraavat ominaisuudet pätevät.*

B(i) $DE = ED$.

B(ii) $(DE)F = D(EF)$.

B(iii) $D1 = D$ *, missä* $1 = D(1) \neq 0$.

B(iv) *Jos* $D \neq 0$ *, niin on olemassa* $D^{-1} \in \mathbb{R}$ *siten, että* $DD^{-1} = 1$.

C *Osittelulaki* - $(D + E)F = DF + EF$.

E(ii) *Jos* $D \leq E$ *ja* $0 \leq F$*, niin* $DF \leq EF$.

Todistus. Oletetaan ensin, että D, E, F ovat kaikki positiivisia. Koska rationaalilukujen kertolasku on vaihdannainen,

$$DE = DE = \{q \in \ \mid q \leq 0\} \cup \{xy \mid x \in D, y \in E, x, y > 0\} =$$

$$\{q \in \ \mid q \leq 0\} \cup \{yx \mid y \in E, x \in D, y, x > 0\} = ED.$$

Samasta syystä $(DE)F = D(EF)$.
Osoitetaan, että $D1 = D$, missä $1 = D(1) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\}$. Huomaa erityisesti, että $1 \neq 0 = D(0)$.
Määritelmän mukaan

$$D1 = \{q \in \ \mid q \leq 0\} \cup \{xy \mid x \in D, y \in D(1), x, y > 0\}.$$

Koska $D > 0$, määritelmän mukaan $\{q \in \ \mid q \leq 0\} \subset D$. Olkoot $x \in D$ ja $y \in D(1)$ sellaisia, että $x, y > 0$. Tällöin erityisesti $0 < y < 1$, joten $xy < x \in D$. Koska D on ideaali, $xy \in D$. Näin ollen $D1 \subset D$. Kääntäen olkoon $x \in D$. Jos $x \leq 0$, niin $x \in D1$ triviaalisti. Oletetaan, että $x > 0$. Koska D:ssä ei ole suurinta alkiota, on olemassa $x' \in D$, $x' > x > 0$. Tällöin $0 < y = x/x' < 1$, joten $y \in D(1)$. Lisäksi $x = x'y \in DD(1)$. Näin ollen $D1 \subset D$.

Käänteisalkio konstruoidaan seuraavasti. Määritellään ensin

$$E = \{q \in \ \mid q \leq 0\} \cup \{y^{-1} \mid y \notin D\}.$$

Osoitetaan, ensin, että E on Dedekindin leikkaus. Ensinnäkin koska $D > 0$, niin $0 \in D$, joten mikään luku D:n komplementista $\mathbb{Q} \setminus D$ ei ole nolla. Erityisesti y^{-1} on hyvin määritelty rationaaliluku, kun $x \notin D$.
Koska $0 \in E$, E on epätyhjä. Lisäksi, jos $x > 0$ ja $x \in D$, niin $x^{-1} \notin E$. Näin ollen $E \neq \mathbb{Q}$.
Osoitetaan, että E on ideaali. Olkoon $y \in E$ ja $z < y$. Jos $z \geq 0$, $z \in E$ triviaalisti. Oletetaan. että $0 < z$. Koska $0 < z < y$, niin $y^{-1} < z^{-1}$. Jos olisi $z^{-1} \in D$, niin myös pätisi $y^{-1} \in D$ (D on ideaali). Tämä on vastoin oletusta, koska $y^{-1} \notin D$. Näin ollen myös $z^{-1} \notin D$, mistä seuraa, että $z \in E$.
Olemme näyttäneet, että E on Dedekindin leikkaus. Se ei välttämättä ole taaskaan avoin, joten määritellään $D^{-1} = E^0$.
Osoitetaan, että $DD^{-1} = D(1)$. Olkoon ensin $q \in DD^{-1}$. Jos $q \geq 0$, niin erityisesti $q < 1$ ja $q \in D(1)$. Oletetaan, että $q > 0$. Tällöin $q = xy$, missä $x \in D$, $y \in D^{-1} \subset E$ ja $x, y > 0$. Koska $x \in D$ ja $y^{-1} \notin D$, Lemman 113 nojalla $x < y^{-1}$, mistä seuraa, että $q = xy < 1$. Näin ollen $DD^{-1} \subset D(1)$.
Kääntäen olkoon $z \in D(1)$ eli $z < 1$. Haluamme osoittaa, että $z \in DD^{-1}$. Jos $z \geq 0$, asia on selvä. Muuten oletetaan, että $0 < z < 1$. Merkitään $a = 1/z$, tällöin $a > 1$. Lemman 120 nojalla on olemassa $x \in D, x > 0$ ja $y \notin D, y > 0$ siten, että $y < ax$. Koska $y \notin D$, $y^{-1} \in E$. Voimme olettaa, että y^{-1} ei ole E:n suurin alkio, sillä jos se on, korvataan y luvulla y', jolle pätee $y < y' < ax$. Näin ollen voidaan olettaa, että $y^{-1} \in D^{-1}$.
Epäyhtälö $y < ax$ voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$xy^{-1} > a^{-1} = z.$$

Tässä $xy^{-1} \in DD^{-1}$. Koska DD^{-1} on ideaali, $z \in DD^{-1}$, mitä pitikin todistaa.

Olemme osoittaneet kertolaskun vaihdannaisuus, liitännäisyys ja käänteisalkion olemassaolo vain positiivisille reaaliluvuille. Näytetään miten näiden

erikoistapausten ja kertolaskun määritelmien avulla tuloksia voidaan yleistää kaikkiin reaalilukuihin.
Jos D tai E on nolla, niin $DE = 0 = ED$. Jos $D < 0$ ja $E > 0$, niin

$$DE = -((-D)E) = -(E(-D)) = ED$$

ja samaan tulokseen päädytään kun $D > 0$ ja $E < 0$. Lopuksi, jos $D, E < 0$, niin $-D$ ja $-E$ ovat positiivisia, joten

$$DE = (-D)(-E) = (-E)(-D) = ED.$$

Liitännäisyys osoitetaan samalla tavalla tarkastelemalla erilaisia vaihtoehtoja (HT).
Olkoon $D < 0$. Merkitään $D' = -D > 0$. Yllä todistetun nojalla on olemassa käänteisalkio D'^{-1}, joka on myös positiivinen. Kertolaskun määritelmästä seuraa, että

$$D(-D'^{-1}) = (-D')(-D'^{-1}) = D'D'^{-1} = 1.$$

Näin ollen $-D'^{-1}$ on D:n käänteisalkio. Olemme näyttäneet, että kaikilla nollasta eroavilla reaaliluvuilla on käänteisalkio.

Ennen kuin mennään osittelulain tarkasteluun, näytetään, että kaikilla reaaliluvuilla D, E pätee kaava

$$(-D)E = -(DE).$$

Vaihdannaisuuden nojalla tästä myös seuraa $D(-E) = -(DE)$, joten molemmista saadaan lisäksi yhtälö

$$(-D)(-F) = DF.$$

Näistä ”merkkisäännöistä” on hyötyä osittelulain tarkastelussa.

Meidän on siis osoitettavaa kaava $(-D)E = -(DE)$. Jos $D = 0$ tai $E = 0$, molemmat puolet yhtyvät nollaan määritelmän mukaan. Jos $D > 0$ ja $E > 0$, niin $-D < 0$, joten kertolaskun määritelmän mukaan tällöin

$$(-D)E = -((-(-D))E) = -(DE),$$

koska $-(-D) = D$ kaikilla $D \in \mathbb{R}$.
Jos $D < 0$ ja $E > 0$, niin määritelmän mukaan

$$DE = -((-D)E.$$

Ottamalla molemmista puolesta vasta-alkio saadaan väite.
Jos $D > 0$ ja $E < 0$, niin $-D < 0, E < 0$, joten määritelmän ja vaihdannaisuuden nojalla

$$(-D)E = (-(-D))(-E) = D(-E) = (-E)D.$$

Koska $E < 0$ ja $D > 0$, niin yllätodistetun tapauksen nojalla $(-E)D = -(ED)$, mistä taas vaihdannaisuuden nojalla seuraa, että

$$(-D)E = (-E)D = -(ED) = -(DE),$$

mitä pitikin todistaa.
Viimeinen tapaus on $D, E < 0$. Tällöin $-D > 0$ ja $E < 0$, joten yllätodistetun mukaan

$$DE = (-(-D))E = -((-D)E),$$

mistä väite seuraa taas ottamalla molemmasta puolesta vasta-alkion.

Siirrytään nyt osittelulain

$$(D + E)F = DF + EF$$

todistukseen. Perustapaus, jossa D, E, F ovat kaikki positiivisia jätetään harjoitustehtäväksi.
Oletetaan, että osittelulaki pätee kun D, E, F ovat positiivisia ja näytetään, miten tästä seuraa yleinen osittelulaki.

Jos $F = 0$, osittelulaki pätee muodossa

$$(D + E)0 = 0 = 0 + 0 = D0 + E0.$$

Jos $D = 0$ osittelulaki pätee muodossa

$$(0 + E)F = EF = 0 + EF = 0F + EF$$

ja samoin hoidetaan tapaus $E = 0$.

Tapaus $F > 0$.
Kun D ja E ovat molemmat positiivisia, väite tunnetaan jo. Tarkastellaan tapaus, jossa D ja E ovat erimerkkisiä. Koska osittelulaki on täysin symmetrinen D:n ja E:n suhteen (koska yhteenlasku on vaihdannainen), riittää tarkastella tapaus, jossa $D > 0$ ja $E < 0$. Tämäkin tapaus jaetaan kahteen tapaukseen sen mukaan, onko $D + E \geq 0$ vai onko $D + E < 0$.

Oletetaan, että $D' = D + E \geq 0$. Koska myös $E' = -E > 0$, aikaisemmin jo todistettu osittelulain erikoistapaukset antavat

$$(D + E)F - EF = D'F + E'F = (D' + E')F = DF.$$

Huomaa, että määritelmän mukaan $EF = -(E'F)$, joten $-(EF) = E'F$. Lisämällä saatuun yhtälöön molemmille puolelle EF, saadaan haluttu tulos $(D + E)F = DF + EF$.
Seuraavaksi pitää vielä tarkastella tapaus, jossa $D + E < 0$. Tällöin $-D + (-E) = -(D + E) > 0$ ja $-D = D' < 0$ ja $E' = -E > 0$. Näin ollen luvut D' ja E' toteuttavat juuri todistetun tapauksen oletuksia, joten

$$(-D)F + (-E)F = D'F + E'F = (D' + E')F = (-(D + E))F.$$

Koska $D > 0$, kertolaskun määritelmän mukaan $(-D)F = -(DF)$. Koska $E < 0$, niin vastaavasti määritelmän mukaan $EF = -(-E)F$, mistä seuraa, että $(-E)F = -(EF)$. Lopuksi havaitaan, että samasta syystä

$$(-(D + E))F = -((D + E)F).$$

Näin ollen yllä johdettu yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$-(DF + EF) = -DF - EF = -((D + E)F).$$

Osittelulaki seuraa, kun molemmista puolesta otetaan vasta-alkiot.
Jäljellä on vielä tapaus $D, E < 0$. Se menee samalla tavalla kuin edellinen (yksityiskohdat HT).

Tapaus $F < 0$.
Olkoon C mielivaltainen Dedekindin leikkaus. Osoitetaan ensin, että $C(-F) = -CF$. Jos $C > 0$, niin kertolaskun määritelmän nojalla $CF = -(C(-F))$, mistä seuraa $-(CF) = C(-F)$. Jos $C = 0$ molemmat puolet ovat nolla ja jos $C < 0$, niin kertolaskun määritelmän mukaan $C(-F) = -((-C)(-F)) = -CF$. Väite on osoitettu.
Nyt voidaan todistaa osittelulaki. Olkoot G ja H mielivaltaisia. Merkitään $G = D + E, H = -F$. Nyt $H > 0$, joten edellä todistetun tapauksen nojalla

$$GH = (D + E)H = DH + EH.$$

Sovelletaan nyt edellä todistettua kaavaa $C(-F) = -CF$ tapauksiin $C = G, D, E$ ja sijoitetaan tulos kaavaan $GH = DH + EH$. Saadaan

$$-(D + E)F = -GF = G(-F) = GH = DH + EH =$$

$$= D(-F) + E(-F) = -DF - EF = -(DE + EF).$$

Ottamalla vasta-alkion molemmilta puolelta saadaan haluttu tulos.

Jäljellä on ominaisuus E(ii). Oletetaan, että $D \leq E$ ja $F \geq 0$. Lisäämällä epäyhtälön $D \leq E$ molemmille puolelle alkion $-D$, saadaan, että $E' = E - D \geq 0$. Reaalilukujen kertolaskun määritelmästä seuraa, että kahden ei-negatiivisen luvun tulo on ei-negatiivinen, joten $E'F \geq 0$. Mutta (juuri todistetun yllä) osittelulain nojalla $E'F = EF - DF$. Näin ollen $EF - DF \geq 0$, joten $DF \leq EF$. □

Tässä vaiheessa voimme todeta, että me olemme onnistuneet todistamaan puolet kurssin tavoitteesta (reaalilukujen olemassaolo ja yksikäsitteisyys).

Seuraus 122. *Systeemi* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$*, missä* $\mathbb{R}$ *on avointen Dedekindien leikkausten joukko, toteuttaa reaalilukujen määritelmän. Erityisesti on olemassa reaalilukujen joukko.*

Todistus. Propositiot 115, 117 ja 121. □

Jäljellä on vielä reaalilukujen yksikäsitteisyys (isomorfiaa vaille). Ennen kuin todistetaan sen, palautetaan mieleen kanoninen upotus $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
Olkoon $\mathbb{R}$ mielivaltainen reaalilukujen joukko. Tällöin Lemman 106 nojalla on olemassa injektio $\tilde{h}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ joka toteuttaa kaikilla $x, y \in \mathbb{Q}$ kaavoja

$$\tilde{h}(x + y) = \tilde{h}(x) + \tilde{h}(y),$$

$$\tilde{h}(xy) = \tilde{h}(x)\tilde{h}(y),$$

ja jos $x \leq y$, niin $\tilde{h}(x) \leq \tilde{h}(y)$. Lisäksi $\tilde{h}(0) = 0$, $\tilde{h}(1) = 1$ ja $\tilde{h}$ on **ainoa** kuvaus jolla on kaikki nämä ominaisuudet.
Olkoon $\mathbb{R}$ Dedekindin leikkausten muodostama konkrettinen malli reaalilukujen joukko. Olemme konstruoineet kuvauksen $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $i(q) = D(q)$. Lisäksi Propositioista 115, 117, 121 ja Lemmoista 116, 118 seuraa, että i toteuttaa kaikki Lemman 106 ehtoja. Kuvauksen $\tilde{h}$ yksikäsitteisyydestä seuraa, että itse asiassa Dedekindin leikkausten mallille $\tilde{h} = i$, eli $\tilde{h}(q) = D(q)$.

Lause 123. Reaalilukujen joukon olemassaolo ja yksikäsitteisyys.
On olemassa systeemi $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$*, joka toteuttaa määritelmää 1. Lisäksi jos* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *ja* $(\mathbb{R}', +', \cdot', \leq')$ *molemmat toteuttavat määritelmän 1 aksioomia, on olemassa yksikäsitteinen bijektiivinen kuvaus* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$*, siten, että* $f(0_R) = 0_{\mathbb{R}'}$ *ja* $f(1_R) = 1_{\mathbb{R}'}$ *ja kaikilla* $a, b \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$f(a + b) = f(a) +' f(b),$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot' f(b),$$

ja jos $a \leq b$, *niin* $f(a) \leq f(b)$.
Tällaista kuvausta sanotaan isomorfismiksi.

Todistus. Olemassaolo todettiin jo yllä Seurauksessa 122.
Yksikäsitteisyys osoitetaan ensin konkreettisen Dedekindinin mallin $\mathbb{R}$ ja mielivaltaisen mallin $\mathbb{R}'$ suhteen. Yleisen tapaukseen palataan sen jälkeen.
Kiinnitetään siis Dedekindindin leikkausten muodostama malli, merkitään se $\mathbb{R}$:llä, ja olkoon $\mathbb{R}'$ mielivaltainen malli. Käytetään yksinkertaisuuden vuoksi sen laskutoimituksille ja järjestyksille samanlaisia merkintöjä kuin $\mathbb{R}$:ssä, eli merkitään ne $+, \cdot$ ja $\leq$.
Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ isomorfismi, kuten Lauseen muotoilussa. Osoitetaan, että se on yksikäsitteinen. Jos rajoitutaan se $\mathbb{R}$:n osajoukolle $\mathbb{Q}$ (joka nyt koostuu Dedekindind leikkauksista jotka ovat muotoa $D(q), q \in \mathbb{Q}$), niin saadaan kuvaus $f'\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}'$, joka toteuttaa kaikki Lemman 106 ominaisuudet. Koska saman Lemman 106 nojalla tällainen kuvaus on yksikäsitteinen, $f' = \tilde{h}'$, missä $\tilde{h}'\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ on yksikäsitteinen kanoninen upotus reaalilukujen joukolle $\mathbb{R}'$.
Olkoon $D \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Tällöin D on avoin Dedekindind leikkaus joukossa $\mathbb{Q}$, erityisesti $D \subset \mathbb{Q}$. Osoitetaan, että

$$f(D) = \sup\{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\} = \sup\{f(q) \mid q \in D\},$$

missä viimeisessä yhtälössä käytetään hyväksi samastusta $q = D(q)$ ja havaintoa siitä, että $\tilde{h}'(q) = f(q)$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}$, jonka osoitimme yllä.
Koska kuvaus $\tilde{h}'$ on yksikäsitteinen, tämä todistaisi kuvauksen f yksikäsitteisyyttä.

Väite on siis

$$f(D) = \sup\{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\} = \sup\{f(q) \mid q \in D\}$$

kaikilla $D \in \mathbb{R}$. Olkoon $q \in D$. Tällöin $D(q) \subset D$ joukossa $\mathbb{R}$ eli $D(q) \leq D$. Koska oletamme, että f säilyttää järjestyksen, saadaan

$$f(q) = f(D(q)) \leq f(D).$$

Erityisesti joukko $\{f(q) \mid q \in D\} \subset \mathbb{R}'$ on rajoitettu ylhäältä. Lisäksi se on selvästi epätyhjä. Koska täydellisyysaksiooma pätee $\mathbb{R}'$:ssä, on olemassa $x' = \sup\{f(q) \mid q \in D\}$ ja edellisen nojalla

$$x' \leq f(D).$$

Seuraavaksi halutaan osoittaa epäyhtälö toiseen suuntaan. Tehdään vasta-oletus, jolloin $x' < f(D)$ joukossa $\mathbb{R}'$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä missä tahansa reaalilukujen mallissa (Lemma 108), on olemassa $r = f(r) = \tilde{h}(r) \in \mathbb{Q}$ siten, että $x' < r = f(r) < f(D)$. Koska x' on joukon $\{f(q) \mid q \in D\}$ yläraja, ei voi päteä $r \in D$ (muuten olisi $r \leq x'$). Koska joukossa $\mathbb{R}$ leikkaukset D ja $D(r)$ voidaan vertailla suuruusjärjestyksen mukaan keskenään (järjestys $\mathbb{R}$:ssä täysi järjestys), pakko pätee $D < D(r)$ eli $D \subset D(r), D \neq D(r)$ (sillä muuten olisi $r \in D$). Mutta kuvaus f on injektio, joka säilyttää järjestyksen, mistä helposti seuraa, että $f(D) < f(D(r)) = f(r)$. Tämä on ristiriita luvun r valinnan kanssa. Näin ollen r ei voi olla olemassa, joten vasta-oletus $x' < f(D)$ johtaa ristiriitaan. Pitää siis olla $x' \geq f(D)$, mistä aikaisemmin todistetun epäyhtälön $x' \leq f(D)$ yhdessä seuraa haluttu yhtälö $x' = f(D)$. Näin ollen kaikilla $D \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(D) = \sup\{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\},$$

mikä todistaa f:n yksikäsitteisyyttä ja samalla kertoo meille suoraan miten isomorfismi f pitää määritellä.

Osoitetaan siis isomorfismin f olemassaoloa määrittelemällä $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ kaavalla

$$f(D) = \sup\{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\}.$$

Tässä $\tilde{h}'\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}'$ on yksikäsitteinen kanoninen upotus (Lemma 106). Ensin pitää osoittaa, että $f(D)$ on hyvin määritelty, eli joukko $\{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\}$ on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu (koska $\mathbb{R}'$:ssä voimassa olevan täydellisyysaksiooman nojalla vain sellaisilla joukoilla voi olettaa olevan supremum). Joukon epätyhjyys on selvä, koska D on Dedekindind leikkauksena epätyhjä. Lisäksi D on ylhäältä rajoitettu (Lemma 113), joten on olemassa $r \in \mathbb{Q}$, jolle $q \leq r$ kaikilla $q \in D$. Tästä helposti seuraa, että vastaava rationaaliluku $\tilde{h}'(r)$ on joukon $\{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\}$ yläraja $\mathbb{R}'$:ssä (pohjimmiltaan koska $\tilde{h}$ säilyttää järjestyksen). Näin ollen kyseinen joukko on todellakin epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, joten f on hyvin määritelty.

Seuraavaksi osoitetaan, että $f(D) < f(D')$ aina kun $D < D'$. Tästä seuraa sekä f:n injektivisyys, että ominaisuus "$D \leq D'$ implikoi $f(D) \leq f(D')$".
Oletetaan, että $D < D'$. Tällöin $D \subset D'$ ja on olemassa $r \in D' \setminus D$. Koska D':ssä ei ole suurinta alkiota, on olemassa myös $r' \in D', r' > r$. Lisäksi kaikilla $q \in D'$ pätee $q \leq r < r'$ (Lemma 113).
Olkoon $x \in A = \{\tilde{h}'(q) \mid q \in D\}$ mielivaltainen ja olkoon $y = \sup B = \{\tilde{h}'(q) \mid q \in D'\}$. Nyt joukossa $\mathbb{R}'$ pätee

$$x \leq \tilde{h}'(r) = r < r' = \tilde{h}'(r') \leq y = f(D').$$

Ottamalla supremum yli $x \in A$, nähdään, että

$$f(D) = \sup A \leq r < r' \leq y = f(D').$$

Väite seuraa tästä.

Kuvauksen f injektivisyys seuraa edellisestä tarkastelusta. Osoitetaan, että f on surjektio. Olkoon $x \in \mathbb{R}'$. Lemman 109 nojalla

$$x = \sup\{\tilde{h}'(q) \mid \tilde{h}(q) < x, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Olkoon $D = \{q \in \mathbb{Q} \mid \tilde{h}(q) < x\} \subset \mathbb{Q}$. Riittää näyttää, että D on avoin Dedekindin leikkaus, silloin tällön $D \in \mathbb{R}$ ja suoraan määritelmästä seuraa, että $f(D) = x$, jolloin surjektiviisuden todistus on valmis.
Koska Lemman 108 nojalla $\mathbb{Q}$ on tiheässä $\mathbb{R}'$:ssä, on olemassa $r, s \in \mathbb{Q}$ joille

$$x - 1 < r < x < s < x + 1,$$

joten $r \in D$ ja $s \notin D$. Näin ollen $\emptyset \neq D \neq Q$. Oletetaan, että $q \in D$ ja $r < q, r \in \mathbb{Q}$. Tällöin$r < q < x$ kunnassa $\mathbb{R}'$, joten $r \in D$. D on siis ideaali.
Lopuksi osoitetaan, että D:ssä ei ole suurinta alkiota. Tämä seuraa suoraan Lemmasta 108, sillä jos $q \in \mathbb{Q}$ on mielivaltainen, niin on olemassa $r \in \mathbb{Q}$ siten, että $q < r < x$. Tällöin $r \in D$ ja $r > q$ joten q ei voi olla D:n suurin alkio.
Olemme osoittaneet, että $D \in \mathbb{R}$. Surjektivisuus seuraa.

Seuraavaksi osoitetaan, että kaikilla $D, D' \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(D + D') = f(D) + f(D').$$

Olkoon $r = q + q' \in D + D'$, missä $q \in D, q' \in D'$. Tällöin

$$\tilde{h}'(r) = \tilde{h}'(q) + \tilde{h}'(q') \leq f(D) + f(D').$$

Ottamalla supremum vasemmalta puolelta saadaan

$$f(D + D') \leq f(D) + f(D').$$

Kääntäen olkoot $q \in D, q' \in D$. Tällöin

$$\tilde{h}'(q) + \tilde{h}'(q') = \tilde{h}'(q + q') \leq f(D + D')$$

Pidetään $q' \in D'$ toistaiseksi kiinnitettynä ja kirjoitetaan saatu tulos muodossa

$$\tilde{h}'(q) \leq f(D + D') - \tilde{h}'(q').$$

Otetaan vasemmalta puolelta supremum yli $q \in D$, jolloin saadaan

$$f(D) \leq f(D + D') - \tilde{h}'(q').$$

Tämä tulos pätee kaikilla $q' \in D'$. Kirjoitetaan se muotoon

$$\tilde{h}'(q') \leq f(D + D') - f(D)$$

ja otetaan vasemmalta puolelta suoremum. Saadaan $f(D') \leq f(D + D') - f(D)$, mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$f(D) + f(D') \leq f(D + D')$$

kanssa. Yhdessä yllätodistetun epäyhtälön $f(D+D') \leq f(D)+f(D')$ kanssa se anta halutun yhtälön

$$f(D + D') = f(D) + f(D').$$

Väite $f(0) = 0$ seuraa itse asiassa tästä yhtälöstä (joten sitä ei oikeastaan tarvitse vaatia Lauseen muotoilussa erikseen ja voi jättää siitä pois). Nimittäin nyt $f(0) + f(0) = f(0 + 0) = f(0)$ mistä vähentämällä molemmilta puolelta alkiota $f(0)$, saadaan $f(0) = 0$.

Kaava

$$f(DD') = f(D)f(D')$$

osoitetaan samalla tavalla ensin ei-negatiivisille luvuille D, D'. Sen jälkeen ”merkkisääntöjä” käyttämällä saadaan yleinen väite. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

Yhtälö $f(1) = 1$ voidaan myöskin johtaa muista f:n ominaisuuksista, joten ei sekään ollut aivan pakko vaatia erikseen. Nimittäin ensin osoitetaan, että $f(1) = a \neq 0$. Tämä johtuu siitä, että jos olisi $f(1) = 0$, niin edellisen nojalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätisi $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = f(x)0 = 0$, mikä on mahdotonta, sillä f on surjektio. Näin ollen $f(1) = a \neq 0$. Mutta tällöin

$$a^2 = a \cdot a = f(1)f(1) = f(1^2) = f(1) = a,$$

mistä päästään yhtälöön $a = 1$ kertomalla yhtälö a:n käänteisluvulla.

Olemme näyttäneet, että jokaiselle reaalilukujoukolle $\mathbb{R}'$ on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, missä $\mathbb{R}$ on Dedekindin leikkausten muodostama malli. Yleisesti olkoot $\mathbb{R}', \mathbb{R}''$ mielivaltaisia reaalilukujoukkoja. Osoitetaan, että on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $g \colon \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$. Yllä todistetun nojalla on olemassa yksikäsitteiset isomorfismit f', f'', missä

$f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ ja $f''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}''$ ($\mathbb{R}$ Dedekindin lekkausten malli). Helposti nähdään, että isomorfismin käänteiskuvaus on myös isomorfismi ja kahden isomorfismin yhdiste on isomorfismi(tarkista), joten $g = f'' \circ (f')^{-1}\colon \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$ on isomorfismi. Erityisesti isomorfismi on olemassa. Osoitetaan vielä sen yksikäsitteisyyttä. Olkoon $g'\colon \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$ jokin isomorfismi. Tällöin $g \circ f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}''$ on isomorfismi, joten yksikäsitteisyyden nojalla $g \circ f' = f''$. Tästä seuraa, että

$$g = (g \circ f') \circ f'^{-1} = f'' \circ f'^{-1}.$$

iisomorfismin yksikäsitteisyys osoitettu. □

Arhimedeen kunnat ja $\mathbb{R}$.

Olemme konstruoineet mallin reaalilukujen joukolle kunnan $\mathbb{Q}$ Dedekindin leikkausten joukkona. Kuitenkin ainoat $\mathbb{Q}$:n ominaisuudet, jonka olemme käyttäneet varsinaisessa konstruktiossa olivat järjestetyn Arkhimedeen kunnan ominaisuudet. Näin ollen yhtä hyvin olisimme voineet lähteä mistä tahansa Arkhimedeen järjestetystä kunnasta K ja konstruoida $\mathbb{R}$ kunnan K Dedekindin leikkausten joukkona. Tällöin voidaan määritellä upotus $i\colon K \to \mathbb{R}$ samalla tavalla kuin rationaalilukujen tapauksessa, $i(k) = D(k), k \in K$. Tästä seuraa, että jokainen Arkhimedeen kunta K voidaan upottaa johonkin reaalilukujen joukkoon. Mutta kaikki reaalilukujen joukot ovat isomorfisia, joten jokainen Arkhimedeen kunta on isomorfian vaille jokin $\mathbb{R}$:n alikunta. Kääntäen helposti nähdään, että jokainen $\mathbb{R}$:n alikunta on Arkhimedeen. Näin ollen kunta on Arkhimedeen jos ja vai jos se on olennaisesti $\mathbb{R}$:n alikunta. Tästä myös seuraa, että jokainen ei-Arkhimedeen kunta ei voida upottaa joukkoon $\mathbb{R}$. Jos Dedekindin leikkauksiin perustuva konstruktio yritetään tehdä ei-Arkhimedisessa kunnassa, se ei onnistu, koska tällä tavalla konstruoitu joukko ei ole enää kunta.
Harjoitustehtävä: käy läpi Dedekindin konstruktio yllä ja mieti mitkä reaalilukujen aksioomat menevät läpi ilman Arkhimedeen ehtoa ja mitkä taas ei mene.

6.2 Cauchy jonot

Reaaliluvuille on olemassa monta erilaista konstruktioita, mutta kaikista tunnetut ja eniten käytetyt ovat edellisessä aliluvussa tarkasteltu Dedekindin konstruktio ja Cauchy-jonoihin perustuva konstruktio. Tässä aliluvussa esitetään (ilman todistuksia) tapa konstruoida reaalilukuja Cauchy-jonoista lähtien.

Suppeneminen ja Cauchy jonot.

Olkoon K järjestetty kunta. Itseisarvo-funktio K:ssä määritellään tavalliseen tapaan, asettamalla kaikilla $k \in K$

$$|k| = \begin{cases} k, & \text{k } k \geq 0, \\ -k, & \text{jos } k < 0. \end{cases} \quad .$$

Ehto $|x| \leq a$ on yhtäpitävä ehdon $-a \leq x \leq a$ kun $a \geq 0$. Tarkastelemalla erilaisia vaihtoetoja voidaan johtaa itseisarvolle *kolmioepäyhtälön*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Merkkisäännöistä seuraa puolestaan kertolaskulle kaava

$$|ab| = |a||b|.$$

Itseisarvon avulla kunnassa voidaan puhua alkioiden välisistä ”etäisyyksistä” ja arvioida alkioiden välistä ”läheisyyttä”. Ajatus on siinä, että pienempi on $|a - b|$ sitä lähempänä toisiaan a ja b ovat.

Raja-arvon ja suppenemisen käsitteet hyödyntävät tätä mielikuvaa alkioiden läheisyydestä.

Jono joukossa X on mikä tahansa kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to X$. Yleensä merkitään $f(n) = x_n$ ja koko jono merkitään $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mikä tahansa jono järjestetyssä kunnassa K ja olkoon $x \in K$. Sanomme, että jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee* kohti x jos kaikilla $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Oikeastaan tällaista merkintää saa käyttää vain sillä ehdolla, että raja-arvo osoitetaan yksikäsitteiseksi, eli samalla jonolla ei voi olla kaksi erilaista raja-arvoa. Tämän todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkkejä 124. *1. Tarkastellaan kunnassa $\mathbb{Q}$ tai $\mathbb{R}$ jonoa $x_n = \frac{1}{n}$. Tarkkaan ottaen tämä ei ole määritelty arvolla $n = 0 \in \mathbb{N}$, mutta tällä ei ole merkitystä raja-arvon tarkastelun kannalta. Asetetaan esimerkiksi $x_0 = 0$.*

Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Olkoon $\varepsilon \in K = \mathbb{Q}$ tai $\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Lemman 107 nojalla on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ jolle

$$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ pätee

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon,$$

mikä todistaa väitteen. Huomaa, että todistus perustuu olennaisesti Arkhimedeen ehtoon, joka on voimassa $\mathbb{Q}$:ssä ja $\mathbb{R}$:ssä. Itse asiassa sama todistus toimii missä tahansa Arkhimedeen kunnassa. Ei-Arkhmideen kunnassa taas jonolla $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei edes **ole** *raja-arvoa (HT)!*

2. *Bernoullin epäyhtälön ja edellisen tuloksen avulla voidaan todistaa, että*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

kun $0 < x < 1$, $x \in \mathbb{R}$. Nimittäin tällöin $a = 1/x > 1$, joten

$$a^n > 1 + n(a-1) > bn,$$

missä $b = a - 1 > 0$. Tästä seuraa, että

$$x^n = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{bn}.$$

Tämä saadaan "niin pieneksi kuin halutaan" samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä todistettiin, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Jonon raja-arvon määritelmässä on "vikana" se, että ensin pitää "arvata" mahdollinen raja-arvo ja vasta sen jälkeen voi todistaa sen raja-arvoksi määritelmän mukaan. Tästä syystä matematiikassa arvostetaan erityisesti tuloksia, joiden avulla raja-arvon olemassaolo voidaan päätellä ilman, että sen arvo tunnettaisi etukäteen.

Yksi tärkeä välttämätön (mutta ei aina riittävä) ehto jonon raja-arvon olemassaololle on niin sanottu **Cauchyn ehto**. Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mikä tahansa jono järjestetyssä kunnassa K. Sanomme sen Cauchyn jonoksi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jos kaikilla $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

kaikilla $n, m \geq n_\varepsilon$.
Cauchyn ehto siis ilmaisee sen, että jonot jäsenet "pakkaantuvat yhä tiiviimmin yhteen" kun indeksi n kasvaa.

Jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono. Tämä nähdään seuraavasti. Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono, joka suppenee kohti $x \in K$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin myös $\varepsilon/2 > 0$[15]. Koska x_n suppenee kohti x, on olemassa $n_\varepsilon > 0$ siten, että

$$|x_n - x| < \varepsilon/2.$$

Tällöin kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x -_m)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Siis jono on Cauchy.
Käänteinen väite ei päde yleisesti - kunnassa K voi olla Cauchyn jono, jolla ei ole raja-arvoa. Jos kunnassa K jokainen Cauchyn jono suppenee, kunta sanotaan olevan *täydellinen Cauchyn mielessä.* Tätä käsitettä ei saa sekoittaa täydellisyyteen täydellisyysaksiooman mielessä, joka pätee vain reaalilukujen kunnassa.

Esimerkki 125. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Näytetään, että on olemassa rationaaliluvuista koostuva jono $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joka suppenee kohti x. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitaan $q_n \in Q$ jolle pätee*

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x.$$

Tämä on mahdollista, koska $\mathbb{Q}$ on tiheässä $\mathbb{R}$:ssä (Lemma 108). Nyt

$$|x - q_n| = x - q_n < \frac{1}{n},$$

mistä seuraa samalla tavalla kuin Esimerkissä 124, että

$$\lim_{n\to\infty} q_n = x.$$

Erityisesti suppenevana jonona jono $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. Mutta se voidaan yhtä hyvin ajatella jonona kunnassa $\mathbb{Q}$. Selvästä Cauchyn ehto ei riippu siitä, missä kunnassa asia tarkastellaan, joten (q_n) on Cauchy jono myös $\mathbb{Q}$:ssä. Jos jonon raja-arvo $x \in \mathbb{R}$ ei ole rationaaliluku (esimerkiksi $x = \sqrt{2}$, niin jonolla ei ole raja-arvoa $\mathbb{Q}$:ssä, raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla. Erityisesti $\mathbb{Q}$ ei ole täydellinen Cauchyn mielessä. Reaalilukujen kunta on taas täydellinen Cauchyn mielessä. Tähän palataan myöhemmin, jos aikataulu sallii.

[15]Tämän tyyppisissä laskuissa usein hyödynnetään luvulla 2 jakamista. Kunnassa voi käydä niin, että $2 = 1 + 1 = 0$. Kuitenkin järjestetyssä kunnassa näin ei koskaan voi tapahtua, joten kahdella jakaminen on sallittua eikä voi tuoda ongelmia

Edellinen esimerkki antaa vihjeen siitä, miten reaalilukuja voitaisiin konstruoida rationalilukujen Cauchyn jonojen avulla. Esitetään konstruktion pääpiirteet ajan säästämiseksi ilman todistuksia.

Olkoon X kaikkien kunnan $\mathbb{Q}$ Cauchyn jonojen muodostama joukko. Määritellään joukossa X relaatio $\sim$ seuraavasti. Olkoot $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jonoja $\mathbb{Q}$:ssä. Tällöin $x \sim y$ jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - y_n| < \varepsilon$$

kaikilla $n \geq n\varepsilon$. Idea perustuu siihen, että jokainen rationaalilukujen Cachyn jono edustaa reaaliluvun, joka on tämän jonon raja-arvo. Erilaiset jonot x ja y suppenevat kohti samaa lukua jos ja vain jos $x \sim y$.
Voidaan osoittaa, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa X. Reaalilukujen joukko määritellään tekijäjoukkona $X/\sim$. Jonon $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ekvivalenssiluokka merkitään $[x]$ tai $[x_n]$.

Laskutoimituksia Cauchyn jonon ekvivalenssiluokille määritellään ”koordinaateittain”,

$$[x] + [y] = [x_n + y_n],$$

$$[x] \cdot [y] = [x_n \cdot y_n].$$

Järjestys määritellään ehdolla $[x] < [y]$ jos ja vain jos $x_n < y_n$ kun $n \geq n_0$ jollakin $n_0 \in \mathbb{N}$. Sen jälkeen järjestysrelaatio $\leq$ määritellään kuten yleensä $a \leq b$ jos ja vain jos $a < b$ tai $a = b$ (mieti miksi relaation $\leq$ suora määrittely ehdolla $x_n \leq y_n$ ei toimisi).
Voidaan osoittaa, että kaikki näin määritellyt operaatiot ovat hyvin määriteltyjä (eivät riipu edustajan valinnasta) ja systeemi $(X/\sim, +, \cdot, \leq)$ toteuttaa reaalilukujen määritelmän. Näin saadaan Cauchyn jonoihin perustuva konstruktio reaaliluvuille.