2 Joukko-oppi

2.1 ”Naiivi” joukko-oppi

Intuitiivisesti ”joukko” on mikä tahansa kokoelma mistä tahansa ”olioista”. Jos olio a on joukossa A, sanotaan, että a on A:n alkio ja merkitään $a \in A$. Myös sanontaa ”a kuuluu A:han ” käytetään samassa merkityksessä. Jos alkio a ei kuulu joukkoon A, tätä merkitään $a \notin A$.

Silloin kun uusi joukko halutaan määritellä, usein käytetään sulkuja $\{\}$. Sulkujen sisään joko kirjoitetaan lista joukon alkioista, pilkulla erotettuina, tai, jos se ei ole mahdollista tai ei ole kätevää - kirjoittamalla ehto, jolla A:n alkiot tunnustetaan A:n alkioksi.
Esimerkiksi jos joukossa A on tasan kolme alkiota 0, 1 ja 2, voimme ilmaista tätä kirjoittamalla

$$A = \{0, 1, 2\}.$$

Tällaisessa listassa alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä. Myös saman alkion mainitseminen enemmän kuin yksi kertaa ei muuta joukkoa. Näin ollen edellisen joukko voidaan yhtä hyvin kirjoittaa $A = \{1, 0, 2\}$ tai $A = \{0, 1, 2, 1\}$. Kyseessä on sama joukko.

Jos joukossa on paljon, tai jopa ääretön määrä alkioita, emme voi kirjoittaa se listan muodossa, tai siitä listasta tulisi liian pitkä. Esimerkiksi jos A on kaikkien tähän mennessä valittujen Yhdysvaltojen presidenttien muodostama joukko, voimme tietysti kirjoittaa se samalla tavalla listaamalla sen alkioita sulkujen sisään. Kuitenkin tässä joukossa on 44 alkiota, joten tällainen lista olisi melko pitkä. Tällaisissa tapauksissa on paljon järkevämpää määritellä joukko yksinkertaisesti antamalla ehtoja, joiden perusteella alkio otetaan joukkoon. Esimerkiksi näin -

$$A = \{x \mid x \text{ on Yhdysvaltojen presidentti, joka tuli valituksi ennen vuotta 2013}\}.$$

Tässä joukon esitys on siis muotoa

$$\{ \text{ symboli alkiolle } \mid \text{ ehto, jonka perusteella alkio hyväksytään joukkoon } \}.$$

Tällaisessa merkinnässä ensimmäisessä osassa on vain symboli, jota käytetään alkiolle. Yleisempi siinä voi olla myös jokin symboleja sisältävä lauseke. Esimerkiksi merkintä

$$\{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

tarkoittaa joukkoa, johon kuuluvat kaikki alkiot y jotka voidaan esittää muodossa $y = x + 1$, missä $x \in \mathbb{R}, x > 0$ (ja vain ne). Tällainen merkintätapa yleisesti näyttää seuraavalta -

$$\{ \text{ tätä muotoa olevat } \mid \text{ mahdolliset lisäehdot } \}.$$

Viivan $\mid$ sijaan monet käyttävät kaksoispistettä :. Esimerkiksi $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ on positiivisten reaalilukujen joukko. Muita käytössä olevia merkintätapoja opitaan matkan varrella.

Alkiot, jotka kuuluvat joukkoon A määräävät sen yksikäsitteisesti. Tästä seuraa, että jos A ja B ovat joukkoja, joihin kuuluvat täsmälleen samat alkiot, ne ovat sama joukko, $A = B$. Tästä seuraa seuraava käytännössä tärkeä periaate.

Yhtäsuuruus, periaate 1 - Joukot A ja B ovat sama joukko jos ja vain jos jokainen A:n alkio on myös B:n alkio ja jokainen B:n alkio on myös A:n alkio.

Jos edellisestä väitteestä pätee vain toinen puoli, kyse on *osajoukosta*. Formaalisti joukko B on joukon A osajoukko, jos jokainen B:n alkio on myös A:n alkio. Jos lisäksi $A \neq B$, B on *aito* osajoukko.
Jos B on A:n osajoukko, tätä merkitään $B \subset A$. Jos lisäksi B on aito osajoukko, tätä voidaan merkitä $B \subsetneq A$.

Esimerkiksi kaikkien miesten muodostama joukko on kaikkien ihmisten muodostaman joukon aito osajoukko. Samoin kaikkien ihmisten muodostama joukko on kaikkien nisäkkäiden muodostaman joukon aito osajoukko. Kaikkien positiivisten reaalilukujen joukko on sama joukko kuin kaikkien sellaisten reaalilukujen x joukko, joille $-x$ on negatiivinen. Tämän osoitimme Lemmassa 6.

Joukon A osajoukko B voidaan määritellä merkinnällä

$$B = \{x \in A \mid x \text{ toteuttaa jonkun ehdon}\}.$$

Esimerkiksi positiivisten reaalilukujen muodostama joukko voidaan antaa muodossa

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Käytännössä väite $A \subset B$ osoitetaan näyttämällä, että mielivaltainen A:n alkio x on myös B:n alkio.

Esimerkki 12. *Olkoot* $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$ *ja* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. *Osoitetaan, että* $A \subset B$.

Olkoon $x \in A$. *Tällöin* $x > 1$. *Lemman 6 mukaan* $1 > 0$. *Tästä ja reaalilukujen aksioomasta D(iii) seuraa, että* $x > 0$, *eli* $x \in B$. *Todistus on valmis.*

Osajoukon käsitteen avulla voimme ilmaista ja osoittaa joukkojen yhtäsuuruus toisella tavalla.

Yhtäsuuruus, periaate 2 -Olkoot A ja B joukkoja. Tällöin $A = B$ jos ja vain jos A on B:n osajoukko ja B on A:n osajoukko.

Näin ollen voimme osoittaa väite $A = B$ todeksi osoittamalla erikseen kaksi väitettä,
1) osoitetaan, että $A \subset B$,
2) osoitetaan, että $B \subset A$.

Esimerkki 13. *Osoitetaan, että*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

Olkoon ensin $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$. *Tällöin* a *on reaaliluku ja* $a > 1$. *Meidän on osoitettavaa, että* $a \in \{x+1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ *eli* a *voidaan esittää muodossa* $a = x + 1$ *jollakin reaaliluvulla* $x > 0$.
Asetetaan $x = a - 1$. *Tällöin* $x = a - 1 > 1 - 1 = 0$ *ja* $x + 1 = (a - 1) + 1 = a$. *Näin ollen jokainen joukon* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ *alkio on myös joukossa* $\{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. *Toisin sanoen*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \subset \{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}. \tag{14}$$

Seuraavaksi osoitetaan toinen suunta. Olkoon $a \in \{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. *Tällöin on olemassa positiivinen reaaliluku* x *siten, että* $a = x + 1$. *Koska* $x > 0$, *Lemmasta 5 seuraa, että*

$$a = x + 1 > 0 + 1 = 1.$$

Näin ollen $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ *ja olemme osoittaneet, että*

$$\{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}. \tag{15}$$

Kaavoista (14) ja (15) seuraa, että

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

Kokoelmaa $\{\ \}$, joka ei sisällä yhtäkään alkiota, hyväksytään joukoksi. Se merkitään symbolilla $\emptyset$ ja kutsutaan *tyhjäksi joukoksi.* Tyhjän joukon hyväksyminen joukoksi saattaa kuulostaa omituiselta, mutta se on kätevä, sillä usein tarkastelemme joillakin ehdoilla määriteltyjä joukkoja, joista emme välttämättä etukäteen tiedä, sisältävätkö ne mitään alkioita ollenkaan.

Esimerkiksi joukko $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 2x^2 + x + 3 = 0\}$ on itse asiassa tyhjä, vaikka tämä tosiasia on tuskin jokaiselle triviaalisti selvää ensi näkemältä. "Samannäköinen" joukko $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 4x^2 - x + 1 = 0\}$ taas on epätyhjä. Tässä tapauksessa pystymme selvittää kumpi joukoista on tyhjä, mutta se vaatii epätriviaalia matemaattista tietoa (esimerkiksi differentiaalilaskentaa). Joskus esille taas voi tulla joukko josta emme edes tiedä onko se epätyhjä emmekä osaa päätellä asiasta mitään. Esimerkiksi tällä hetkellä kukaan ei tiedä onko joukko

$$\{n \text{ on parillinen luonnollinen luku }, n > 2 \mid n \text{ ei voida esittää kahden alkuluvun summana }\}$$

tyhjä (kuuluisa Goldbachin konjektuuri) ja ehkä kukaan ei koskaan tiedäkään.

Tästä syystä tyhjän joukon kieltäminen vain monimutkaistaisi tarkastelua ilman mitään hyvää syytä. Joutuisimme aina tarkistamaan ovatko tarkastelussa olevat joukot epätyhjiä. Lisäksi se olisi turha rajoitus, sillä joukko-oppi tulee hyvin toimeen tyhjän joukon kanssa.

Tyhjä joukko on yksikäsitteinen - kaikki tyhjät joukot ovat itse asiassa sama joukko. Tämä seuraa suoraan joukkojen yhtäsuuruuden määritelmästä. Nimittäin olkoot A ja B molemmat tyhjiä. Jos olisi $A \neq B$, se tarkoittaisi, että toinen joukoista A, B sisältää alkion, joka ei kuulu toiseen joukkoon. Mutta tällöin erityisesti ainakin toinen joukoista A, B sisältäisi alkion, mikä on mahdotonta, sillä molemmat ovat tyhjiä.

Yllä käyty todistus on tyypillinen esimerkki niin sanotun "tyhjän joukon logiikan" soveltamisesta. Jokainen väite, joka koskee *kaikkia* tyhjän joukon alkioita on aina tosi, sillä jos se ei olisi, niin löytyisi "vasta-esimerkki" eli sellainen alkio, jolle väite on epätosi, erityisesti tyhjästä joukosta löytyisi alkio. Esimerkiksi jokaiselle $x \in \emptyset$ pätee $x^2 = -5$, sillä muuten olisi $x \in \emptyset$, jolle $x^2 \neq -5$, eli erityisesti olisi olemassa $x \in \emptyset$. Samalla tavalla nähdään, että kaikki tyhjän joukon alkiot ovat tehtyjä juustosta jne. Tästä syystä joskus kuulee ihmisten väittävän jopa, että "tyhjälle joukolle kaikki väitteet ovat tosia". Tämä ei ole totta - esimerkiksi kaikki väitteet jotka alkavat sanoilla "on olemassa alkio" eivät tietenkään ole voimassa tyhjälle joukolle, juuri tyhjän joukon määritelmän mukaan.

Tyhjän joukon logiikalla nähdään, että tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, $\emptyset \subset A$, missä A on mielivaltainen joukko. Onhan väite $\emptyset \subset A$ sama kuin väite "kaikille $x \in \emptyset$ pätee $x \in A$".

Joukkojen laskutoimitukset

Joukkojen *yhdiste, leikkaus ja erotus* ovat tärkeitä algebrallisia operaatioita, joita joukoille määritellään. Näistä kaksi ensimmäistä voidaan soveltaa mielivaltaiseen joukkojen kokoelmaan. Aloitetaan tarkastelu kuitenkin kahden joukon tapauksella.

Olkoot A ja B joukkoja. Niiden *yhdiste* $A \cup B$ määritellään kaavalla

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

Yhdisteseen $A \cup B$ otetaan siis mukaan kaikki alkiot jotka ovat ainakin toisessa joukoista $A \cup B$, mahdollisesti molemmissa[1].

Leikkaus $A \cap B$ määritellään kaavalla

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

Alkio siis kuuluu leikkaukseen $A \cap B$ jos ja vain jos se kuuluu sekä A:han, että B:hen.

Erotus $A \setminus B$ koostuu kaikista A:n alkioista, jotka EIVÄT kuulu joukkoon B. Toisin sanoen

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Esimerkiksi olkoot $A = \{a, c, d, x\}$ ja $B = \{b, c, z\}$, missä oletamme, että eri symbolit a, b, c, d, x, z tarkoittavat kaikki eri alkioita. Tällöin

$$A \cup B = \{a, b, c, d, x, z\},$$

$$A \cap B = \{c\},$$

$$A \setminus B = \{a, d, x\},$$

$$B \setminus A = \{b, z\}.$$

[1]Matematiikassa sana "tai" tulkitaan aina ei-poissulkevaksi ehdoksi, ellei muuta mainita. Toisin sanoen "a tai b" ymmärretään "a tai b tai molemmat"

Jos lisäksi $C = \{b, e\}$ ja $D = \{a, c, d, e, x\}$, niin $A \cap C = \emptyset = A \setminus D$. Näin ollen, vaikka lähtöjoukot X ja Y eivät ole tyhjiä, niiden leikkaus tai erotus voi olla tyhjä. Tämäkin on hyvä syy hyväksyä tyhjä joukko joukoksi.

Joukkojen laskutoimitukset toteuttavat erilaisia hyödyllisiä ominaisuuksia. Mainitaan niistä muutamna erityisen tärkeän.
Kaikille joukoille A, B, C pätevät seuraavat kaavat.

$$A \cup B = B \cup A, \; A \cap B = B \cap A, \tag{16}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{17}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \; (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \tag{18}$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \; A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \tag{19}$$

Kaavat (16) sanovat, että yhdiste ja leikkaus ovat vaihdannaisia operatioita. Kaavat (17) sanovat, että nämä operaatiot ovat liitännäisiä. Säännöt (18) ovat "osittelulakeja" leikkaukselle ja yhdisteelle. Säännöt (19), jotka tunnetaan nimellä "De Morganin Lait", kertovat, että joukkojen erotusoperaatio muuttaa yhdiste leikkaukseksi ja päinvastoin.

Huomaa, että jokaisessa kohdassa (16)-(19) on kaksi kaavaa ja jokaisen parin toinen kaava saadaan ensimmäisestä vaihtamalla jokainen yhdisteen symboli $\cup$ leikkauksen symboliksi $\cap$.

Osoitetaan esimerkin vuoksi toinen De Morganin laista

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Muiden kaavojen (16)-(19) tarkat todistukset jätetään harjoitustehtäväksi.

Olkoon $x \in A \setminus (B \cup C)$. Tällöin $x \in A$ ja $x \notin B \cup C$. Se, että x ei kuuluu yhdisteseen $B \cup C$ implikoi, että $x \notin B$, sillä jos $x \in B$, niin erityisesti $x \in B \cup C$. Samoin $x \notin C$. Se, että $x \in A$ ja $x \notin B$ tarkoittaa sitä, että $x \in A \setminus B$. Se, että $x \in A$ ja $x \notin C$ tarkoittaa sitä, että $x \in A \setminus C$. Olemme näyttäneet, että $x \in A \setminus B$ ja $x \in A \setminus C$. Leikkauksen määritelmän nojalla $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Väite $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ on osoitettu.

Tarkastellaan toinen suunta. Oletetaan, että $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Tämä tarkoittaa tasan sitä, että $x \in A \setminus B$ ja $x \in A \setminus C$. Ensimmäinen väite tarkoittaa, että $x \in A$ ja $x \notin B$. Toisesta saadaan samalla tavalla $x \in A$ ja $x \notin C$. Tiedämme siis, että $x \in A$ ja lisäksi $x \notin B$ ja $x \notin C$. Osoitetaan, että $x \notin B \cup C$. Tehdään vasta-oletus, $x \in B \cup C$. Tällöin yhdisteen määritelmän mukaan joko $x \in B$ tai $x \in C$. Mutta ensimmäinen vaihtoehto on ristiriidassa sen kanssa, että $x \notin B$ ja toinen - sen kanssa, että $x \notin C$. Näin ollen x ei voi olla yhdisteen $B \cup C$ alkio, joten $x \notin B \cup C$. Olemme näyttäneet, että $x \in A$ ja $x \notin B \cup C$. Erotuksen määritelmän mukaan $x \in A \setminus (B \cup C)$. Olemme näyttäneet, että $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$.

Joukkojen kokoelmat, yhdisteet ja leikkaukset.
Usein joudumme tarkastelemaan kokoelmia, joiden alkiot ovat itse kokoelmia, eli joukkoja. Joukko siis voi olla toisen joukon alkio. Itse asiassa "naiivi" erottelu alkioiden ja joukkojen välillä on keinotekoinen, vaikka vastaakin intuitiivista mielikuvaa joukoista. "Oikeassa" matemaattisessa joukko-opissa kaikki tarkasteltavat objektit ovat joukkoja.
Olkoon siis $\mathcal{A}$ joukko, jonka kaikki alkiot ovat joukkoja. *Yhdiste* kokoelman $\mathcal{A}$ yli on joukko

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \text{ on olemassa kokoelman } \mathcal{A} \text{ alkio } A \text{ siten, että } x \in A\}.$$

Leikkaus on puolestaan joukko

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid x \text{ kuuluu jokaiseen kokoelman } \mathcal{A} \text{ joukkoon }\}.$$

Yhdisteeseen siis otetaan mukaan kaikki alkiot, jotka ovat ainakin yhdessä kokoelman $\mathcal{A}$ joukossa. Leikkaukseen taas otetaan kaikki alkiot, jotka ovat kaikissa kokoelman $\mathcal{A}$ joukoissa.
Yllä tarkasteltu kahden joukon tapaus voidaan tulkita tämän yleisen konstruktion erikoistapauksena, kun tulkitaan, että $A \cup B$ ($A \cap B$) on kahden alkion $\{A, B\} = \mathcal{A}$ muodostaman kokoelman yhdiste (leikkaus).

Esimerkki 20. *Jokaisella reaaliluvulla $x > 0$ määrittelemme* avoin väli $(0, x)$ *joukkona*

$$\{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < x\}.$$

Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien näiden välien muodostama kokoelma. Tällöin $\bigcup \mathcal{A}$ on kaikkien positiivisten reaalilukujen joukko. Leikkaus $\bigcap \mathcal{A}$ taas on tyhjä joukko.

Todistetaan kumpikin väite. Olkoon z yhdisteen $\bigcup \mathcal{A}$ alkio. Tällöin on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $z \in (0, x)$. Erityisesti $z > 0$ eli z on positiivinen. Olemme näyttäneet, että

$$\bigcup \mathcal{A} \subset \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}.$$

Kääntäen olkoon $z > 0$ positiivinen reaaliluku. Tällöin $z \in (0, z+1)$, missä $z + 1 > 0$, joten väli $(0, z+1)$ on kokoelmassa $\mathcal{A}$. Näin ollen $z \in \bigcup \mathcal{A}$. Olemme todistaneet, että

$$\{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\} \subset \bigcup \mathcal{A}.$$

Kaiken kaikkiaan, olemme näyttäneet, että $\bigcup \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$.

Osoitetaan, että leikkaus $\bigcap \mathcal{A}$ on tyhjä joukko. Tehdään vasta-oletus ja oletetaan, että $z \in \bigcap \mathcal{A}$. Tällöin $z \in (0, x)$ jokaisella $x > 0$. Erityisesti esimerkiksi $z \in (0, 1)$, joten $z > 0$. Lemman 7 nojalla on olemassa $z' \in (0, z)$. Koska $z' < z$, $z \notin (0, z')$ (Lemma 5). Mutta toisaalta $z' > 0$, joten väli $(0, z')$ on kokoelmassa $\mathcal{A}$. Koska oletimme, että $z \in \bigcap \mathcal{A}$, täytyy olla $z \in (0, z')$, mikä juuri todettiin epätodeksi. Saatu ristiriita osoittaa sen, että z ei voi olla olemassa, joten kyseinen leikkaus on tosiaankin tyhjä.
Jos avointen välien sijaan tarkastellaan suljettuja välejä $[0, x]$, $x > 0$, niin kokoelman $\mathcal{B} = \{[0, x] \mid x > 0\}$ leikkaus $\mathcal{B}$ on yhden alkion joukko $\{0\}$ (mieti miten tarkka todistus menisi).

Potenssijoukko.
Olkoon A joukko. Kaikkien sen osajoukkojen muodostamaa joukkoa sanotaan A:n *potenssijoukoksi* ja merkitään $\mathcal{P}(A)$. Määritelmän mukaan siis

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Väitteet $B \subset A$ ja $B \in \mathcal{P}(A)$ ovat yhtäpitäviä. Potenssijoukko on aina epätyhjä, sillä $A \in \mathcal{P}(A)$, onhan jokainen joukko itseensä osajoukko. Myös $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, sillä tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko.

Esimerkki 21. *Olkoot $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$. Tällöin $B \in \mathcal{P}(A)$, sillä $B \subset A$, mutta $A \notin \mathcal{P}(B)$, sillä A ei ole B:n osajoukko.*

Esimerkki 22. *Tyhjällä joukolla on vain yksi osajoukko - tyhjä joukko itse, joten $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ sisältää tasan yhden alkion. Tämän joukon potenssijoukossa on puolestaan kaksi alkiota,*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Tämän joukon potenssijoukko sisältää 4 alkiota,

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

jne. Iteroimalla potenssijoukon konstruktiota tällä tavalla saadaan melko paljon joukkoja lähtemällä tyhjästä joukosta. Tässä mielessä voidaan sanoa, että matematiikassa pystytään konstruoimaan "kaikki" tyhjästä eli "ei mistään".

Karteesinen tulo.
Usein joudutaan puhumaan alkioiden *järjestetystä jonosta*, jonka jäsenten alkioiden järjestyksellä on merkitystä. Esimerkiksi järjestetyn parin (a, b) *ensimmäinen koordinaatti on* a ja *toinen koordinaatti* on b. Pari (a, b) on yleisesti ottaen eri pari kuin (b, a) (paitsi silloin kun $a = b$). Näin ollen tällaista paria ei voi mallita esimerkiksi joukkona $\{a, b\}$, sillä $\{a, b\}$ ja $\{b, a\}$ on sama joukko. Jos järjestetyn parin käsitettä halutaan mallintaa joukko-opin puitteissa, pitää keksiä jotain monimutkaisempaa.

Ajatellaan, että pari (a, b) tunnetaan, jos tiedetään mikä alkio on sen ensimmäinen komponentti ja mikä alkio on sen toinen komponentti. Tästä seuraa, että järjestettyjen parien on toteuttaavaa seuraava ominaisuus.

(23) $$(a, b) = (c, d) \text{ jos ja vain jos } a = c \text{ ja } b = d.$$

Tämä ominaisuus otetaan konstruktion lähtökohdaksi. Periaatteessa mikä tahansa tapa määritellä järjestetyt parit, joka toteuttaa ehdon 23, kelpaa 'viralliseksi' määritelmäksi. Näin ollen riittää keksiä joku yksi toimiva konstruktio ja asettaa se määritelmäksi.
Nykyään on yleisesti käytössä seuraava määritelmä.

Määritelmä 24. *Järjestetty pari* (a, b) *määritellään joukkona* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Lemma 25. *Yllä annettu järjestyneen parin määritelmä toteuttaa ominaisuuden (23).*

Todistus. Oletetaan, että $(a, b) = (c, d)$ eli

(26) $$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Meidän on osoitettavaa, että $a = c$ ja $b = d$.
Oletetaan ensin, että $a = b$. Tällöin $\{a, b\} = \{a\}$, joten yhtälön 26 vasemmalla puolella on joukko $\{\{a\}\}$, joka sisältää siis tasan yhden alkion $\{a\}$. Tästä seuraa, että myös oikeanpuoleinen joukko sisältää vain yhden alkion, joten pitää olla $\{c\} = \{c, d\}$. Erityisesti $d \in \{c, d\} = \{c\}$, mistä seuraa, että

$d = c$. Yhtälö 26 muuttuu yhtälöksi $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, josta seuraa ensin, että $\{a\} = \{c\}$, ja viimein $a = c$. Lisäksi $b = a = c = d$. Väite on todistettu.

Seuraavaksi tarkastellaan tapaus $a \neq b$. Oletuksen nojalla $\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$, joten $\{c\} = \{a\}$ tai $\{c\} = \{a, b\}$. Kuitenkin jälkimmäinen tapaus on mahdoton, sillä joukossa $\{c\}$ on tasan yksi alkio ja joukossa $\{a, b\}$ tasan kaksi alkiota. Näin ollen $\{c\} = \{a\}$, mistä seuraa, että $a = c$.
Oletuksen nojalla $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$. Vertamaalla alkioiden lukumääriä taas, nähdään, että on oltava $\{a, b\} = \{a, d\}$. Tästä seuraa, että $b = a$ tai $b = d$. Ensimmäinen tapaus on mahdoton oletuksen $a \neq b$ nojalla, joten $b = d$. Todistus on valmis. $\square$

Olkoot A ja B joukkoja. *Karteesinen tulo* $A \times B$ määritellään joukona, joka koostuu tasan kaikista järjestetyistä pareista (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$. Toisin sanoen

$$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Mikä tahansa tämän joukon osajoukko R, eli mikä tahansa kokoelma pareja (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$, sanotaan joukkojen A ja B väliseksi *relaatioksi.* Relaatio voidaan ajatella ilmaisevan erään "suhteen" joukkon A alkioiden ja joukon B alkioiden välillä. Jos pari (a, b) on relaatiossa R, ajatellaan ikään kuin, että alkio a on jossakin "suhteessa" b:n kanssa. Jos $R \subset A \times B$ on relaatio ja $(a, b) \in R$, tätä merkitään myös aRb ja sanotaan, että alkio a on relaatiossa R alkion b kanssa.
Jos yllä $A = B$, relaatio $R \subset A \times A$ sanotaan yksinkertaisesti relaatioksi joukossa A.

Esimerkiksi olkoon A kaikkien naisten joukko ja B kaikkien miesten joukko. Tällöin niiden välillä on esimerkiksi relaatioita

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ on naimisessa } b\text{:n kanssa}\},$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a \text{ on } b\text{:n äiti}\},$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a \text{ on } b\text{:n sisko}\}.$$

Kaikki nämä relaatiot voidaan tulkita myös joukon $X = \{$ kaikki ihmiset $\}$ relaatioksi.
Koska tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, se on myös karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko, eli erityisesti relaatio A:n ja B:n välillä, niin sanottu *tyhjä relaatio.* Esimerkiksi yllä tarkastetuille joukoille relaatio

$$R_4 = \{(a, b) \mid a \text{ on Yhdysvaltojen presidentti ja } b \text{ on matemaatikko}\}$$

on tyhjä.

Relaation $R \subset A \times B$ *määrittelyjoukko* $\operatorname{dom} R$ ja *kuvajoukko* $\operatorname{im} R$ määritellään

$$\operatorname{dom} R = \{a \in A \mid \text{ on olemassa } b \in B \text{ siten, että } (a,b) \in R\},$$

$$\operatorname{im} R = \{b \in A \mid \text{ on olemassa } a \in A \text{ siten, että } (a,b) \in R\}.$$

Huomaa, että $\operatorname{dom} R$ on A:n osajoukko ja $\operatorname{im} R$ on B:n osajoukko.
Esimerkiksi yllä annetuille miesten ja naisten välisille relaatioille pätee

$$\operatorname{dom} R_1 = \{ \text{ naimisissa olevat naiset } \},$$

$$\operatorname{dom} R_2 = \{ \text{ naiset, joilla on ainakin yksi poika } \},$$

$$\operatorname{dom} R_3 = \{ \text{ naiset, joilla on ainakin yksi veli } \},$$

$$\operatorname{dom} R_4 = \emptyset.$$

Vastaavasti

$$\operatorname{im} R_1 = \{ \text{ naimisissa olevat miehet}\},$$

$$\operatorname{im} R_2 = \{ \text{ kaikki miehet}\} = B,$$

$$\operatorname{im} R_3 = \{ \text{ miehet, joilla on ainakin yksi sisko}\},$$

$$\operatorname{im} R_4 = \emptyset.$$

Eräs matemaattinen esimerkki relaatiosta tuli meille vastaan aikaisemmin reaalilukujen määritelmässä. Se on relaatio ”pienempi tai yhtä suuri kuin” joka on relaatio joukosta $\mathbb{R}$ itselleen.

Kuvaukset.
Relaation käsitteen avulla voidaan mallintaa kuvauksen käsitteen, joka on kenties tärkeämpiä yleisluonteisia matemaattisia käsitteitä.
Epäformaalisti kuvaus f joukkojen A ja B välillä on mikä tahansa ”sääntö”, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a yksikäsitteisen joukon B alkion $f(a)$. Sanomme myös, että f *kuvaa* alkio a alkioksi $f(a)$. *Funktio* on kuvauksen synonyymi.
Formaalisti kuvaus joukkojen A ja B välillä on mikä tahansa relaatio $f \subset A \times B$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:
jokaisella $a \in A$ on olemassa *yksikäsitteinen* (eli tasan yksi) $b \in B$, siten, että $(a,b) \in f$.
Jos f on kuvaus joukkojen A ja B välillä, tätä merkitään yleensä $f\colon A \to B$. Jokaisella $a \in A$ yksikäsitteinen $b \in B$, jolle $(a,b) \in f$, merkitään $f(a)$ ja

sanotaan alkion f *kuvaksi* kuvauksessa f. Joukkoa A sanotaan kuvauksen f *lähtöjoukoksi* ja joukkoa B sanotaan sen *maalijoukoksi*.

Kun f on määritelty jollakin yksinkertaisella säännöllä, se merkitään myös $x \mapsto f(x)$. Esimerkiksi kuvausta $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kaava on $f(x) = \sin x$ voidaan merkitä myös $x \mapsto \sin x$.
Kuvauksen määritelmästä seuraa erityisesti, että jos $f \colon A \to B$ on kuvaus, niin $\operatorname{dom} f = A$. Sen sijaan $\operatorname{im} f$ voi olla aito B:n osajoukko.

Yllä relaatiot R_1, R_2, R_3 eivät ole funktioita jo siitä syystä, että jokaisen lähtöjoukko ei ollut koko joukko A. Tätä ongelmaa on kuitenkin helppoa korjata - jokainen relaatio $R \colon A \to B$ on aina myös karteesisen tulon $\operatorname{dom} R \times B$, tai jopa karteesisen tulon $\operatorname{dom} R \times \operatorname{im} R$ osajoukko, eli vastaavien joukkojen välinen relaatio, näin ollen sen määrittelujoukko voidaan aina "rajoittaa" joukkoon $\operatorname{dom} R$.
Ovatko relaatiot $R_i, i = 1, 2, 3$ kuvauksia, jos ne ajatellaan relaatioina $\operatorname{dom} R_i$:n ja B:n välillä? Jos rajoitutaan länsimäiseen kulttuuriin, jossa moniavioisuus ei laillisesti esiinny, niin R_1 on kuvaus - jokaisella naimisissa olevalla naisella on tasan yksi aviomies. Relaatiot R_2 ja R_3 eivät ole kuvauksia, koska naisella voi olla enemmän kuin yksi poika tai veli.
Jos taas 'käännetään' R_2:n määritelmää ja tarkastellaan relaatiota $R' \subset B \subset A$,

$$R' = \{(b, a) \mid a \text{ on } b\text{:n äiti}\},$$

niin R' on kuvaus $B \to A$ - onhan jokaisella miehellä tasan yksi (biologinen) äiti.

Reaalilukujen määritelmässä mainitut laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat kuvauksia $: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esimerkki 27. *Tarkastellaan relaatiota* $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Tällöin f *on kuvaus, itse asiassa tuttu toisen asteen kuvaus* $x \mapsto x^2$. *Tämän kuvauksen kuvajoukko* $\operatorname{im} f$ *on ei-negatiivisten lukujen joukko* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. *Sisältyvyys*

$$\operatorname{im} f \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

on Lemman 6 helppo seuraus. Toinen suunta on vaikeampi - meidän pitää todistaa, että jokaiselle ei-negatiivisille reaaliluvulle y *on olemassa reaaliluku* x *jolle* $x^2 = y$. *Toisin sanoen pitää osoittaa, että jokaisella ei-negatiivisella* *reaaliluvulla on neliöjuuri. Tämä voidaan todistaa samalla tavalla kuin Lemmassa 9 olemme todistaneet, että luvulla 2 on neliöjuuri. Helpompia tapoja opitaan (ehkä) kurssin loppupuolella (tosin ne ovat tuttuja analyysin peruskursseilta).*

Formaalisti kuvaus on siis tietty joukko (kuten kohta nähdään, formaalista näkökulmasta matematiikassa ei ole mitään muuta kuin joukkoja) järjestyttyjä parejä, paitsi, että siihen sisältyy myös informaatio maalijoukosta B. Esimerkiksi tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Olemme edellisessä luvussa näyttäneet, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten samalla kaavalla voidaan määritellä myös kuvauksen $f'\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$. Jos sekä f ja f' ajatellaan joukkona

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

niin ne ovat sama joukko. Niitä ei kuitenkin pidetä samoina funktioina, koska niillä on erilaiset maalijoukot. Jos haluaa mallintaa tällaisen funktion käsitettä tarkasti joukkona, niin voidaan esimerkiksi sanoa, että funktio on järjestetty pari (f, B), missä f on relaatio eli joukko järjestettyjä pareja, joka toteuttaa funktion ehtoa ja B on sen maalijoukko, jonka pitää toteuttaa ehdon $\operatorname{im} f \subset B$. Lähtöjoukkoa ei tarvitse spesifioida, sillä se voidaan päätellä funktiosta yksikäsitteisesti -

$$\operatorname{dom} f = \{x \mid \text{ on olemassa } (x, y) \in f\}.$$

Käytännössä käytetään usein seuraavaa tapaa tarkistaa ovatko kaksi kuvausta samoja. Olkoot $f\colon A \to B$ ja $g\colon X \to Y$ kuvauksia. Tällöin $f = g$ jos ja vain jos
(i) $A = X$ ja $B = Y$,
(ii) kaikilla $a \in A$ pätee $f(a) = g(a)$.

Jokaiselle joukolle X on olemassa niin sanottu tämän joukon *identtinen kuvaus* $f\colon X \to X$, $f(x) = x$. Tämä kuvaus siis kuvaa alkion itselleen.
Kuvauksia voidaan "yhdistää". Tarkemmin - oletetaan, että $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ ovat kuvauksia. Tällöin voidaan määritellä yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to Z$ kaavalla

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on määritelty jos ja vain jos f:n maalijoukko on sama kuin g:n lähtöjoukko. Kuvausten yhdistäminen on liitännäinen operaatio, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ silloin kun tässä yhtälössä on järkeä, eli kun $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ ja $h\colon Z \to U$. Vaihdannainen se ei sen sijaan ole - jopa silloin kun $g \circ f$ ja $f \circ g$ ovat molemat määriteltyjä, ne ei yleensä ole samoja. Esimerkiksi olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$. Tällöin $(g \circ f)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ja $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$.

Indeksoidut joukkoperheet.
Olkoon $f\colon I \to \mathcal{A}$ kuvaus, jonka kuvajoukko koostuu joukoista. Toisin sanoen $f(i)$ on itse joukko jokaisella $i \in I$. Tällöin sanomme, että kuvajoukko $\operatorname{im} f$ on *indeksoitu* joukolla I. Kuvausta f puolestaan tulkitaan *indeksoiduksi (joukko)perheeksi* ja merkitään $(A_i)_{i \in I}$.
Koska "oikeasti" mitään muita objektia kuin joukkoja ei matematiikassa tarkastella, jokainen kuvaus voidaan tarvittaessa tulkita indeksoiduksi joukkoperheeksi.

Olemme jo törmänneet joukkoperheeseen aikaisemmin esimerkissä (20). Nimittäin, jos jokaisella $x > 0$ määritellään avoin väli $A_x = (0, x) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < x\}$, saadaan kuvaus $x \mapsto A_x$ jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$. Perhe avoimia välejä $\mathcal{A} = \{(0, x) \mid x > 0\}$ on siis indeksoitu joukkoperhe, joka voidaan merkitä myös $(A_x)_{x \in \mathbb{R}}$.

Indeksoidun perheen $(A_i)_{i \in I}$ yhdiste ja leikkaus määritellään olevan sama joukko kuin vastaavan kuvajoukon yhdiste tai leikkaus, eli yksinkertaisesti kaavoilla

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{ on olemassa } i \in I \text{ siten, että } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{ jokaisella } i \in I \text{ pätee } x \in A_i\}.$$

Yleinen karteesinen tulo.
Olkoon $(A_i)_{i \in I}$ indeksoitu perhe joukkoja. Haluamme määritellä yleisen karteesisen tulon

$$\prod_{i \in I} A_i$$

kahden joukon karteesisen tulon $X \times Y$ yleistyksenä. Ajatus on siinä, että tulon alkio on perhe $(x_i)_{i \in I}$, johon poimitaan siis tasan yksi alkio x_i jokaisesta perheen joukosta A_i. Tällaista "alkion poimimista" matematiikassa mallinnetaan hyödyntämällä funktion käsitettä. Jokainen tulon $\prod_{i \in I} A_i$ alkio $(x_i)_{i \in I}$ on siis kuvaus f, jonka määrittely joukko on indeksienjoukko I. Kuvauksen kaava on $f(i) = x_i$. Kyseessä on siis edellisessä osiossa tarkasteltu indeksoitu perhe $(x_i)_{i \in I}$. Jotta se olisi karteesisen tulon $\prod_{i \in I} A_i$ alkio, pitää lisäksi kuvaukselta f vaatia, että jokaisella $i \in I$ pätee

$$f(i) = x_i \in A_i.$$

Näin päädytään seuraavan määritelmään.

Määritelmä 28. *Joukkoperheen $(A_i)_{i\in I}$ karteesinen tulo koostuu kaikista kuvaukista $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$, jotka toteuttavat ehdon*

$$f(i) \in A_i \text{ kaikilla } i \in I.$$

Aikaisemmin määritelty kahden joukon karteesinen tulo $X \times Y$ voidaan tulkita yleisen karteesisen tulon erikoistapauksena, kun ajatellaan, että joukkoja X, Y indeksoidaan kahden alkion joukolla $I = \{1, 2\}$, asettamalla $A_1 = X, A_2 = Y$. Kuvaus $f\colon \{1, 2\} \to X \cup Y$ poimii alkion $f(1) = x \in X$ ja $f(2) = y \in Y$, joten vastaa ajatukseltaan järjestettyä paria (x, y).

Karteesisen tulon määritelmä saattaa tuntua kehäpäätelmältä - määrittelemme tulo funktion käsitteen avulla, mutta funktio on erikoistapaus relaatiosta, joka määritellään kahden joukon karteesisen tulon käsitteen kautta. Mutta mitään kehäpäätelmä ei ole, sillä kahden joukon tapauksen $X \times Y$ olemme määritelleet (tai ”konstruoineet”) käyttämättä funktioita - se tehtiin järjestettyjen parien avulla. Sitten kun $X \times Y$ on määritelty, voimme määritellä mikä on funktio, minkä jälkeen on mahdollista määritellä yleinen kerteesinen tulo.

Tällä kurssilla emme oikeastaan tarvitse yleistä karteesista tuloa, se on esitetty vain täydellisyyden ja yleissivistyksen nimessä. Lisäksi yksi tapa muotoilla Valinta-aksioomaa nojautuu yleiseen karteesiseen tuloon.

2.2 Joukkojen vertailu. Mahtavuus.

Tavallisessa elämässä meillä on olemassa kaikille tuttu tapa vertailla erilaisten joukkojen kokoja keskenään. Esimerkiksi kuvitellaan, että haluamme tietää onko kurssille ”Reaaliluvut” osallistuvien opiskelijoiden lukumäärä pienempi kuin kurssille varatun salin istumapaikkojen määrä, voimme yksinkertaisesti *laskea* kuinka monta opiskelija on kurssille tulossa ja kuinka monta tuolia luokasta löytyy. Sen jälkeen katsotaan kumpi luku on suurempi.

Matemaattiselta näkökulmalta tässä vaiheessa meillä ei kuitenkaan ole sellaista työkalua käytössä kahdesta syystä. Ensinnäkin laskeminen perustuu *luonnollisiin lukuihin*, ja niitä ei vielä kontruoitu. Seuraavassa luvussa itse asiassa konstruoimme luonnollisia lukuja käyttämällä hyväksi tämän aliluvun tuloksia ja käsitteitä, joten emme voi niissä nojautua luonnollisiin lukuihin - teoriaan tulee kehäpäätelmä.
Toinen syy on siinä, että matematiikassa törmäämme jatkuvasti äärettömiin

joukkoihin ja niitä emme voi vertailla keskenään laskemalla niiden alkioiden lukumäärä, ei ainakaan perinteisessä naiivissa mielessä.

Siksi kehitämme eri tavan vertailla joukkojen kokoja keskenään. Tämä tapa käyttää hyväksi joukkojen välisiä kuvauksia.
Ennen kuin mennään täsmällisiin määritelmiin, palataan esimerkkiin opiskelijoista ja luokasta. On olemassa yksi tapa nähdä riittääkö istumapaikkoja kaikille ilman, että mitään lukumääriä lasketa. Nimittäin pyydetään opiskelijoita luokkaan sisään ja pyydetään jokaista löytämään itselleen istumapaikan. Jos kaikille riittää paikkoja - opiskelijoiden joukko on pienempi tai yhtä suuri kuin istumapaikkojen joukko. Jos seisomaan jää opiskelijoita, joille ei riittänyt paikkoja - istumapaikkoja on aidosti vähemmän, eli niiden joukko on aidosti pienempi kuin opiskelijoiden joukko. Jos kaikki opiskelijat istuvat ja yksikään tuoli ei jäänyt tyhjäksi - opiskelijoiden ja istumapaikkojen joukot ovat samankokoisia.

Vastaavuus opiskelijan ja hänen istumapaikan välillä on *kuvaus* joukosta opiskelijoiden joukosta istumapaikkojen joukkoon. Tällä kuvauksella on seuraava ominaisuus - eri opiskelijoita vastaavat eri istumapaikat, sillä emme salli tilannetta, jossa kaksi opiskelijaa istuu samalla tuolilla (se tekisi meidän ideasta kelvottoman). Tällaisia kuvauksia sanotaan *injektioiksi.* Näin ollen, istumapaikkoja riittää kaikille, eli niitä on vähintään saman verran kuin opiskelijoita, jos onnistumme löytämään injektion $f\colon \{\text{ opiskelijat }\} \to \{\text{ istumapaikat }\}$.
Kuvitellaan, että jokainen istumapaikka tuli varatuksi, jolloin ehkä joku opiskelija jäi ilman paikkaa. Tällöin tarkasteltu yllä kuvaus $f\colon \{\text{ opiskelijat }\} \to \{\text{ istumapaikat }\}$ ei välttämättä enää ole määritelty kaikkien opiskelijoiden joukossa, vaan ainoastaan niiden opiskelijoiden joukossa, joille paikka on löytynyt. Tämän kuvauksen kuvajoukko $\operatorname{im} f$ on kuitenkin nyt koko maalijoukko (kaikki tuolit varattuja). Tällaisia kuvauksia sanotaan surjektioiksi. Voimme halutessaan jatkaa kuvaus f koko opiskelijoiden muodostamaan joukkoon. Sitä varten valitaan joku tuoli ja kuvataan kaikki opiskelijat jotka ovat jääneet ilman paikkaa tälle tuolille. Kuvaus ei näiden opiskelijoiden kohdalla enää ilmaise opiskelijan istumapaikkaa, mutta siitä tulee kuvaus $f\colon \{\text{ opiskelijat }\} \to \{\text{ istumapaikat }\}$, joka on määritelty kaikkien opiskelijoiden joukossa. Jos joku on oikeasti jäänyt ilman paikka, tämä kuvaus ei enää ole injektio (miksi?), mutta on edelleenkin surjektio. Tämä havainto voidaan ilmaistaa näin - tuolia on vähemmän tai yhtä paljon kuin opiskelijoita jos ja vain jos on olemassa surjektio $f\colon \{\text{ opiskelijat }\} \to \{\text{ istumapaikat }\}$.
Lopuksi tarkastellaan tapausta, jossa opiskelijoiden ja istumapaikkojen lukumäärä on sama. Tällaisessa tapauksessa yllä tarkasteltu kuvaus $f\colon \{\text{ opiskelijat }\} \to$

$\{$ istumapaikat $\}$ on sekä injektio, että surjektio. Tällaisia kuvauksia sanotaan bijektioiksi.

Määritelmä 29. *Olkoot X ja Y joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin*

- *f on* injektio *jos kaikilla $a, b \in X, a \neq b$ pätee $f(a) \neq f(b)$.*
- *f on* surjektio *jos $\operatorname{im} f = Y$ eli jos kaikilla $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$.*
- *f on* bijektio *jos f on injektio ja surjektio.*

Esimerkki 30. *Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Tämä kuvaus ei ole injektio, sillä esimerkiksi $f(1) = 1 = f(-1)$, vaikka $1 \neq -1$. Se ei ole myöskään surjektio, sillä ei ole olemassa reaalilukua x jolle $f(x) = -1$.*
Jos rajoitetaan kuvaus f osajoukkoon $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, eli tarkastellaan kuvausta $f'\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2$, tällainen kuvaus on injektio, mutta ei edelleenkään ole surjektio.
Jokaisen kuvaus f voidaan "muuttaa" surjektioksi määrittelemällä uudestaan sen maalijoukoksi $\operatorname{im} f$. *Esimerkiksi kuvauksena $\mathbb{R} \to \operatorname{im} f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ funktio $x \mapsto x^2$ on surjektio, mutta ei edelleenkään ole injektio. Tässä oletamme tutuksi, että jokaisella ei-negatiivisella reaaliluvulla on neliöjuuri.*
Jos rajoitetaan sekä lähtö-, että maalijoukko ja tarkastellaan neliöön korottamista funktiona $X \to X$, missä X on ei-negatiivisten reaalilukujen joukko, niin tällainen kuvaus on sekä injektio, että surjektio, toisin sanoen bijektio.

Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Sanomme, että kuvaus $g\colon Y \to X$ on f:n *käänteiskuvaus*, jos $g \circ f = \mathrm{id}_X$ on X:n identtinen kuvaus ja $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Toisin sanoen kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $y \in Y$ pätee

$$g(f(x)) = x, f(g(y)) = y.$$

Lemma 31. *Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin f on bijektio jos ja vain jos f:llä on käänteiskuvaus.*
Jos käänteiskuvaus on olemassa, se on yksikäsitteinen. Lisäksi f^{-1} on tällöin myös bijektio ja sen käänteiskuvaus on f.

Todistus. Tunnettua peruskursseilta, HT. □

Kuvauksen f käänteiskuvausta merkitään f^{-1}.

Esimerkki 32. *Olkoon* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kuvaus* $f(x) = x + 1$*. Tällöin* f *on bijektio.*
Helpoitten tämä nähdään edellisen Lemman avulla, pitää vain keksiä käänteiskuvaus ja sitten osoittaa, että se todellakin on käänteiskuvaus. Jos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *toteuttaa ehdon* $f \circ g = \mathrm{id}$*, se tarkoittaa täsmälleen sitä, että* $g(x) + 1 = f(g(x)) = \mathrm{id}(x) = x$*, mikä on yhtäpitävä yhtälön* $g(x) = x - 1$ *kanssa. Näin löydetään kuvaus* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, joka toteuttaa konstruktionsa perusteella yhtälön* $f \circ g = \mathrm{id}$*. Tarkistetaan vielä, että* $g \circ f = id$*. Se on suora lasku,*

$$g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x.$$

Tarinan opetus: käänteiskuvauksen lauseketta ei tarvitse keksiä tyhjästä, vaan se voidaan ainakin yrittää johtaa. Sen jälkeen kun mahdollinen kandidaatti on löydetty, pitää tietysti tarkistaa, että se toteuttaa käänteiskuvauksen määritelmän.

Määritelmä 33. *Olkoot* X *ja* Y *joukkoja. Sanomme, että joukoilla* X *ja* Y sama mahtavuus *jos on olemassa bijektio* $f\colon X \to Y$*. Tällöin merkitään* $|X| = |Y|$*.*
Sanomme, että X*:n mahtavuus on* pienempi tai yhtä suuri kuin Y*:n mahtavuus, jos on olemassa injektio* $f\colon X \to Y$*. Tällöin merkitään* $|X| \leq |Y|$*.*
Vastaavasti X*:n mahtavuus on* suurempi tai yhtä suuri kuin Y*:n mahtavuus, jos* $|Y| \leq |X|$ *eli on olemassa injektio* $f\colon Y \to X$*. Tällöin merkitään* $|X| \geq |Y|$

Jos joukoilla X ja Y on sama mahtavuus, sanotaan myös, että X ja Y ovat *yhtämahtavat*.
Mahtavuus on jossakin mielessä yleinen tapa vertailla joukkojen keskenään kooltansa perusteella. Olisimme voineet yhtä hyvin käyttää mahtipontisen termin ”mahtavuus” sijaan tuttua sanaa ”koko”, mutta matematiikassa on tapana käyttää sanaa ”koko” vain äärellisten joukkojen mahtavuuksista ja itse termi ”mahtavuus” on niin yleisesti käytössä, että siihen on syytä tutustua ja tottua.

Huomaa, että emme määrittele varsinaista absoluuttista mahtavuuden käsitettä, ainoastaan suhteellisen tavan vertailla joukkojen mahtavuuksia keskenään. Meille mahtavuus on ikään kuin ominaisuus, joka on yhteinen kaikille samaa mahtavuutta oleville joukoille.

Jos $|X| \leq |Y|$ ja $|X| \neq |Y|$, eli $|X| = |Y|$ ei päde, sanomme, että X:n mahtavuus on aidosti pienempi kuin Y:n mahtavuus ja merkitään $|X| < |Y|$. Samoin $|X| > |Y|$ tarkoittaa, että $|X| \geq |Y|$, mutta $|X| \neq |Y|$.

Esimerkki 34. *Olkoon $X = \{x\}$ jokin joukko, joka sisältää tasan yhden alkion ja olkoon Y mielivaltainen joukko. Tutkitaan X:n ja Y:n mahtavuuksien välistä suhdetta.*
Jos $Y = \emptyset$ on tyhjä joukko, niin on olemassa tasan yksi kuvaus $f\colon Y \to X$ eikä yhtään kuvausta $f\colon X \to Y$. Formaalisti tämän nähdään seuraavasti. Karteesinen tulo $\emptyset \times X$ on tyhjä, sillä jos olisi jokin järjestetty pari $(y, x) \in \emptyset \times X$, niin erityisesti olisi olemassa alkio $y \in \emptyset$. Samalla tavalla nähdään, että $X \times \emptyset$ on tyhjä joukko.
Koska tyhjällä joukolla on vain yksi osajoukko - se itse, ainoa relaatio tyhjän joukon $\emptyset$ ja X:n välillä on tyhjä relaatio. Tämä relaatio toteuttaa kuvauksen määritelmän (miksi?), joten se on ainoa kuvaus $f\colon \emptyset \to X$. Lisäksi tämä kuvaus on injektio, koska jos se ei olisi, tyhjässä joukossa olisi jopa kaksi eri alkioita $x, y \in \emptyset$ jolle $f(x) = f(y)$, mikä on mahdotonta.
Erityisesti on olemassa injektio $\emptyset \to X$, joten $|\emptyset| \leq |X|$. Sama tulos pätee itse asiassa jokaiselle joukolle X. Tyhjän joukon mahtavuus on siis pienin *mahdollinen mahtavuus.*
Jos X on epätyhjä joukko, niin ei ole olemassa kuvaksia $f\colon X \to \emptyset$ (ei ole alkioita, joihin voidaan kuvata X:n alkioita), joten ei päde $|X| \leq |\emptyset$. Erityisesi $|X| = |Y|$ ei päde, joten voimme kirjoittaa, että $|X| > |\emptyset|$ ja $|\emptyset| < |X|$.

Olkoon seuraavaksi Y epätyhjä. Tämä tarkoittaa, että voimme valita alkio $y \in Y$. Määritellään kuvaus $f\colon X \to Y$, $f(x) = y$. Tämä kuvaus on injektio, joten $|X| \leq |Y|$. Koska X:ssä on vain yksi alkio, on olemassa vain yksi mahdollinen kuvaus $Y \to X$ - kuvataan kaikki alkiot x:ksi, muita mahdollisuuksia ei ole. Jos Y:ssä on enemmän kuin yksi alkio, tämä kuvaus ei voi olla injektio, joten tällöin väite $|Y| \leq |X|$ ei päde. Toisin sanoen $|X| < |Y|$, jos Y:ssä on ainakin 2 alkioita.
Viimeiseksi tarkastellaan tapausta, jossa $Y = \{y\}$ on myös yhden alkion joukko. Tällöin kuvaus $f\colon X \to Y$, $f(x) = y$ on bijektio. Sen käänteiskuvaus on $g(y) = x$, $g\colon Y \to X$. Näin ollen tällöin $|X| = |Y|$.
Erityisesti olemme näyttäneet, että yhden alkion joukko X on samaa mahtavuutta toisen joukon Y kanssa jos ja vain jos Y sisältää tasan yhden alkion.

Samalla tavalla voidaan näyttää, että joukko, joka on muotoa $\{a, b\}$, $a \neq b$ on yhtämahtava jokaisen kahta alkiota sisältävän joukon kanssa ja vain sellaisten kanssa, ja niin edelleen.

Joukkojen väliset relaatiot ”olla yhtämahtavat”, ”olla mahtavuudeltaan pienempi/suurempi/pienempi tai yhtä suuri/suurempi tai yhtä suuri” toteuttavat luonnollisia ominaisuuksia, joita niitä voisi odottaakin. Nämä kootaan yhteen seuravaksi esiteyissä Lemmoissa alla. Täytyy kuitenkin olla tarkka -

vaikka kaikki nämä ominaisuudet tuntuvat itsestään selviltä, vain osalla niistä on helppoja todistuksia. Jotkut niistä ovat melko syvällisiä ja niiden todistus käyttää raskaita periaatteita ja tuloksia. Siksi emme esitä nyt tarkkoja todistuksia kaikille ominaisuuksille.

Lemma 35. *Käsitteellä "olla samaa mahtavuutta" on seuraavia ominaisuuksia.*

(i) Jokainen joukko X on yhtämahtava itseensä kanssa, $|X| = |X|$.

(ii) Jos $|X| = |Y|$, niin $|Y| = |X|$.

(iii) Jos $|X| = |Y|$ ja $|Y| = |Z|$, niin $|X| = |Z|$.

Todistus. (i) Identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon X \to X$ on aina bijektio. Eritysesti löytyy bijektio $X \to X$.
(ii) Yhtälö $|X| = |Y|$ tarkoittaa, että on olemassa jokin bijektio $f\colon X \to Y$. Lemman 31 nojalla on olemassa käänteiskuvaus $g = f^{-1}\colon Y \to X$, joka on myös bijektio. Erityisesti on olemassa bijektio $Y \to X$.
(iii) Olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ bijektioita. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to Z$ on myös bijektio (HT). □

Lemma 36. *Käsitteellä "olla mahtavuudeltaan pienempi tai yhtä suuri" on seuraavia ominaisuuksia.*

(i) Jos $|X| = |Y|$, niin erityisesti myös $|X| \leq |Y|$ ja $|Y| \leq |X|$. Erityisesti jokainen joukolle X pätee $|X| \leq |X|$.

(ii) Jos $|X| \leq |Y|$ ja $|Y| \leq |Z|$, niin $|X| \leq |Z|$.

(iii) **Cantor–Bernstein–Schroederin Lause:** *Jos $|X| \leq |Y|$ ja $|Y| \leq |X|$, niin $|X| = |Y|$.*

(iv) Olkoot X ja Y mielivaltaisia joukkoja. Tällöin joko $|X| \leq |Y|$ tai $|Y| \leq |X|$. Erityisesti kaikkien joukkojen mahtavuuksia voidaan vertailla keskenään.

(v) $|X| \leq |Y|$ jos ja vain jos $X = \emptyset$ tai on olemassa surjektio $f\colon Y \to X$.

Todistus. (i) Jokainen bijektio $X \to Y$ on erityisesti injektio $X \to Y$. Toinen väite seuraa ensimmäisestä ja edellisen Lemman kohdasta (i).
(ii) Tämän todistus on samanlainen kuin edellisen Lemman kohdan (iii) todistus. Nimittäin, olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ injektioita. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to Z$ on myös injektio. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

(iii) Niin kuin ominaisuuden leimaamisesta hienoksi Lauseeksi pystyy arvamaan, tämä ei ole niin yksinkertainen kuin edelliset kohdat. Tälle väitteelle ei löydy helppoja todistuksia. Se voidaan johtaa Hyvinjärejstyslauseesta ja hyvinjärjestettyjen joukkojen ominaisuuksista, molemmista puhutaan myöhemmin luonnollisten lukujen yhteydessä. Hyvinjärjestyslause puolestaan nojautuu kuuluisaan valinta-aksiooman (siihenkin palataan kohta). On mahdollista osoittaa Cantor–Bernstein–Schroederin Lause todeksi ilman valinta-aksiooma, mutta todistus ei ole helppo ja se sivutetaan.
(iv) Tämäkin väite on vaikeata todistaa ja se myös seuraa Hyvinjärjestyslauseesta, joten asiaan palataan myöhemmin. Lisäksi, päinvastoin kuin edellinen väite, tätä väitettä EI pysty todistamaan ilman valinta-aksioomaa.
(v) Ei ole niin vaikeata kuin edelliset kohdat, mutta vaatii valinta-kasioomaa myös, joten palataan tähän valinta-aksiooman yhteydessä seuraavassa luvussa. $\square$

Edellisestä lemmasta seuraa, että mahtavuuksien välisellä ”pienempi tai yhtä suuri kuin”-käsitteellä on samoja ominaisuuksia kuin reaalilukujen järjestyksellä (aksioomat D). Tästä seuraa, että seuraavan lemman todistus on täysin analoginen Lemman 5 todistuksen kanssa.

Lemma 37. *Käsitteellä ”olla pienempää mahtavuutta” on seuraavia ominaisuuksia.*

(i) Olkoot X ja Y mielivaltaisia joukkoja. Tällöin täsmälleen yksi seuraavista ehdoista on totta.

$$|X| < |Y| \text{ tai } |X| = |Y| \text{ tai } |X| > |Y|.$$

(ii) Jos $|X| < |Y|$ ja $|Y| < |Z|$, niin $|X| < |Z|$.

Esimerkki 38. *Olkoon $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ja $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$. Kuvaus $f \colon X \to Y$, $f(x) = x + 1$ on bijektio, sen käänteiskuvaus on $g \colon Y \to X$, $g(y) = y - 1$. Näin ollen X ja Y ovat yhtämahtavia. Huomaa, että Y on aito X:n osajoukko, mutta silti on ”samankokoinen” sen kanssa.*

Mahtavuuden käsitteen avulla voimme erotella äärellisiä joukkoja äärettömistä. Edellinen esimerkki antaa vihjeen siitä, miten se voidaan tehdä. Yleensähän äärellisellä joukolla tarkoitetaan sellaista joukkoja, jossa on rajoitettu määrä alkioita, joita voidaan siis laskea *luonnollisten luvujen avulla* - yksi, kaksi, kolme jne. Mutta emme voi tällaista määritelmä käyttää, sillä tarkoitus on juuri esittää erás tapa konstruoida luonnollisia lukuja ja siihen tarvitsemme ensin äärellisyyden ja äärettömyyden käsitteitä.

Tähän pulaan auttaa seuraava intuitiivinen havainto - arkikokemuksen perusteella tuntuu selvältä, että äärellisen joukon aito osajoukko ei voi olla samankokoinen kuin koko joukko - siinähän on aidosti enemmän alkioita. Edellisen esimerkin nojalla äärettömille joukoille sama ei välttämättä päde. Itse asiassa voidaan esittää heuristinen perustelu sille, että äärettömässä joukossa X AINA löytyy aito osajoukko, jolla on sama mahtavuus kuin X:llä. Nimittäin olkoon X ääretön. Tällöin se on erityisesti epätyhjä, joten voidaan valita jokin alkio $x_1 \in X$. Koska X on ääretön, siinä on pakko olla muita alkioita, joten voidaan valita $x_2 \neq x_1, x_2 \in X$. Jatkamalla samalla tavalla nähdään, että X:ssä voidaan valita ääretön ketju $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, jonka alkiot ovat kaikki erilaisia. Tässä käytämme siis luonnollisia lukuja indekseina, vaikkei niitä formaalisti vielä määritelty, mutta ei se mitään - tarkoitus on esittää intuiitivinen, heuristinen motivaatio äärettömyyde tarkalle määritelmälle.
Nyt voimme määritellä kuvauksen $f\colon X \to X$ seuraavalla tavalla. Olkoon $x \in X$. Jos x on muotoa x_n jollakin n, eli on meidän ketjussa, määritellään $f(x_i) = x_{i+1}$ eli kuvataan se ketjun seuraavalle alkiolle. Muuten asetetaan $f(x) = x$. Helposti nähdään, että f on injektio, joten se on bijektio, jos se ajatellaan kuvauksena $f\colon X \to fX$. Näin ollen X on yhtämahtava osajoukonsa fX kanssa, joka on kuitenkin aito osajoukko - se ei sisällä alkiota x_1.

Näillä havainnoilla motivoituneina asetamme seuraavan virallisen määritelmän.

Määritelmä 39. *Joukko X on* äärellinen, *jos kaikilla $B \subset A, B \neq A$ pätee $|B| \neq |A|$.*
Joukko X on ääretön, jos se ei ole äärellinen.

Määritelmän mukaan ääretön joukko on siis sellainen joukko X jolla on olemassa aito osajoukko $Y \subsetneq X$ ja bijektio $f\colon X \to Y$.

Esimerkki 40. *Tyhjä joukko $\emptyset$ on äärellinen. Tämä nähdään esimerkiksi vasta-oletuksella - jos se olisi ääretön, sillä olisi aito osajoukko, joka olisi yhtä mahtava sen kanssa, mutta ei tyhjällä joukolla edes ole aitoja osajoukkoja.*
Yhden alkion joukko $\{x\}$ on aina äärellinen. Tämä seuraa siitä, että tällä joukolla on vain yksi aito osajoukko - tyhjä osajoukko. Aikaisemmin olemme näyttäneet, että tyhjä joukko ei ole yhtämahtava yhden alkion joukon kanssa. Samantyyppistä tarkastelua voidaan jatkaa osoittamalla, että kahden alkion joukko on aina äärellinen ja niin edelleen. Yleisesti voidaan osoittaa, että jos äärelliseen joukkoon lisätään yksi alkio, uusi joukko on edelleenkin äärellinen (harjoitustehtävä).

Lemma 41. *Oletetaan, että $A \subset B$.*
a) Jos B on äärellinen, myös A on äärellinen. Toisin sanoen äärellisen joukon mikä tahansa osajoukko on myös äärellinen.
b) Jos A on ääretön, myös B on ääretön.

Todistus. a) Tehdään vasta-oletus, mitä jos A on ääretön. Tällöin on olemassa $C \subsetneq A$ ja bijektio $f\colon A \to C$. "Jatketaan" kuvaus f koko joukkoon B määrittelemällä $f(x) = x$ kaikilla $x \in B \setminus A$. Helposti nähdään, että näin saadaan bijektio B:stä aidolle osajoukolleen, sillä kuvajoukko ei edelleenkään sisältää yhtäkään pistettä epätyhjästä osajoukosta $A \setminus C$. Päädytään siis siihen, että B on ääretön, mikä on vastaan oletusta.
b) Tämä on ekvivalentti kohdan a) kanssa. □

Esimerkki 42. *Olemme esimerkissä 38 yllä näyttäneet, että positiivisten reaalilukujen joukko $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ on yhtämahtava aidon osajoukonsa $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ kanssa. Näin ollen positiivisten reaalilukujen joukko on ääretön. Tästä ja edellisestä lemmasta seuraa, että koko reaalilukujen joukko on ääretön.*

Arkinen intuitio sanoo, että äärettömät joukot ovat kaikki "samankokoisia", ääretön on aina ääretön. Tässä intuitio menee kuitenkin pahasti metsään, sillä tosiasiassa löytyy paljon erikokoisia äärettömiä joukkoja. Esimerkiksi luonnollisia lukija on samaan verran kuin rationaalilukuja, mutta vähemmän kuin reaalilukuja. Tämän todistamme myöhemmin. Tässä vaiheessa tyydytään seuraavaan tulokseen, josta muun muassa seuraa, että ei ole olemassa suurinta mahdollista mahtavuutta.

Propositio 43. Cantorin Lause.
Olkoon X mielivaltainen joukko. Tällöin

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Todistus. Väite $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ on helppo osoittaa. Esimerkiksi kuvaus $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$, $f(x) = \{x\}$ (kuvataan alkio tämän alkion sisältäväksi yhden alkion joukoksi) on injektio (miksi?), mistä väite $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ seuraa suoraan määritelmän perusteella.
Seuraavaksi todistetaan, että $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. Tehdään vasta-oletus, olkoon $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ bijektio. Jokaisella $x \in X$ kuva $f(x)$ on jokin X:n osajoukko. Määritellään X:n osajoukko A kaavalla

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Koska f on bijektio, f on erityisesti surjektio. Tämä perusteella on olemassa $y \in X$ jolle $f(y) = A$. Mietitään, onko y A:n alkio vai eikö ole.
Oletetaan, että $y \in A$. Tämä on sama asia kuin $y \in f(y)$. Mutta toisaalta, koska $y \in A$, joukon A määritelmän mukaan pitää olla $y \notin f(y)$. Ei voi olla $y \in f(y)$ ja $y \notin f(y)$ samaan aikaan, joten päädytään ristiriitaan. Näin ollen tapaus $y \in A$ on mahdoton ja pitää olla $y \notin A$.
Mutta jos $y \notin A$, taas A:n määritelmän nojalla tämä tarkoittaa tasan sitä, että $y \in f(y) = A$. Päädytään taas ristiriitaan - samanaikaisesti pitää olla $y \in A$ ja $y \notin A$.
Näin ollen molemmat mahdollisuudet johtavat ristiritaan. Vika on siis y:n olemassaolossa. Koska alkio y jolle $f(y) = A$ ei siis voi olla olemassa, f ei ole surjektio. Ei se silloin voi olla bijektiokaan.
Päädytään taas ristiriitaan. Tällä kertaa se johtuu siitä, että oletimme bijektion f olemassaoloa. Näin ollen f ei voi olla olemassa, joten X ja $\mathcal{P}(X)$ eivät voi olla yhtämahtavia. $\square$

Edellisessä Propositiossa käytettyä todistusmenetelmää sanotaan *Cantorin diagonaaliargumentiksi*. Georg Cantor oli saksalainen matemaatiikko, jota pidetään joukko-opin keksijänä.