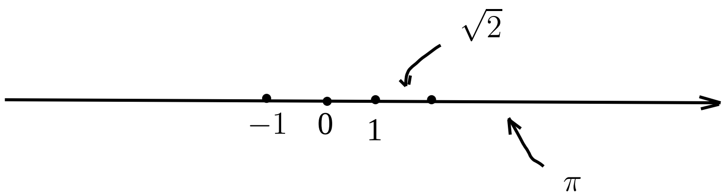
1 Johdanto

1.1 Mitä tiedämme reaaliluvuista koulun jälkeen?

Reaaliluvun käsite on epäilemättä yksi tärkeämpiä matemaattisia käsitteitä, sekä sovellusten, että teorian näkökulmassa. Ei-matemaatikoille eli ”tavallisille ihmisille” reaaliluku on koko matematiikasta varmaan kaikista tutuin objekti. Jos miettii, minkälaista matematiikkaa esimerkiksi koulussa käydään läpi, niin, paria poikkeusta lukuun ottamatta, eihän siinä mitään muuta opiskella kuin reaalilukuja ja niiden ominaisuuksia. Geometria kyllä näyttää aluksi olevan vapautettu algebrasta. Mutta tämä ensivaikutelma osoittautuu virheelliseksi hyvin pian, sillä kulmia, sivuja ja pinta-aloja mitataan nimenomaan reaaliluvuilla ja myöhemmin analyyttisessa geometriassa koko kuvioiden maailma sijoitetaan 'koordinaatistoon', jossa jokaista pistettä kuvaa reaalilukupari.
Tästä huolimatta koulussa ei oikeastaan missään vaiheessa määritellä reaalilukuja täysin tyhjentävästi. Kysymyksiin ”mitä reaaliluvut ovat” ja ”mihin niiden ominaisuudet perustuvat” saadaan vain osittaisia vastauksia. Aika lähellä jonkinlaista yleismääritelmää reaaliluvuille kyllä päästään sanomalla, että ”reaaliluvut vastaavat lukusuoran pisteitä ” ja ”reaaliluvut ovat desimaalilukuja, mahdollisesti päättymättömiä”. Tällaiset selitykset eivät kenties ole täsmällisiä matemaattisia määritelmiä (mikä on suora?) mutta ainakin antavat selkeän havainnollistavan kuvan siitä, mistä puhutaan. Tämä tuottaa psykologisessa mielessä turvallisen olon ja tunteen asian ymmärryksestä, joka voi olla hyödyllinen (mielikuvat edesauttavat lukujen tutkimista), mutta myös saattaa johtaa harhaan, jos ”intuitioon” luottaa liikaa (tai ”väärällä” tavalla).



Lukusuora

Tehdään jonkinlainen yhteenveto siitä, mitä kaikkea tiedämme reaaliluvuista koulun ja lukion jälkeen. Kuten mainitsimme jo, reaaliluvut ovat ”desimaalilukuja”. Jokainen reaaliluku voidaan esittää niin sanotun ”lukusuoran” pisteenä. On suhteellisen selvä miten nämä tulkinnan vastaavat toisiaan - esimerkiksi jos näemme desimaaliluvun

$$2,7463\ldots,$$

tiedämme ainakin periaatteessa miten se löydetään lukusuoralta. Nimittäin ensin väli $[2,3]$ jaetaan kymmeneen yhtä suureen pienempään väliin eli väleihin $[2;2,1]$, $[2,1;2,2]$, ..., $[2,9;3]$. Koska lukumme ensimmäinen desimaali pilkun jälkeen on 7, se sijaitsee välillä $[2,7;2,8]$. Jatketaan samalla tavalla ja jaetaan väli $[2,7;2,8]$ taas kymmeneen osaan, sen jälkeen tiedämme, että luvun on pakko olla välillä $[2,74;2,75]$. Koska näin löydettyjen välien pituus pienenee aina kymmenellä, jatkamalla tällä tavalla pystymme paikantamaan luvun sijaintipaikkan ”mielivaltaisen tarkasti”, mutta ei kuitenkaan välttämättä ihan täsmälleen tarkasti.

Lukuja voidaan laskea yhteen, kertoa keskenään, vähentää toinen toisesta, jakaa keskenään, vertailla kumpi luku on suurempi, ottaa luvuista juuria, logaritmeja ja niin edelleen. Sovelluksissa (esimerkiksi niin sanotuissa ”sanallisissa tehtävissä”) reaaliluvuilla mitataan kaikenlaisia suureita - lukumääriä, painoja, pituuksia, pinta-aloja ja muita. Tästä väistämättä seuraa, että reaaliluvut tuntuvat intuitiivisesti hyvin tutuilta otuksilla - mehän törmäämme jatkuvasti reaalielämässä (pardon the pun) mittaustyyppisiin sovelluksiin reaaliluvuista, esimerkiksi kun luemme lehdestä kuinka paljon hevoslihan kuluttaminen on EU:ssa kasvanut viime vuoden aikana tai kuinka suuren budjetin länsimetron rakentaminen vaatii. Koska tiedämme luvuista kaikenlaista pelkään arkikokemuksen myötä, hyväksymme helposti niiden ominaisuuksia intuitioon pohjalta.
Kuitenkin tällaisissa arkilaskuissa emme koskaan tarvitse, emmekä käytä, kuin ainoastaan niitä äärellisiä desimaalilukuja eli rationaalilukuja. Niiden matemaattinen teoria on paljon yksinkertaisempi ja sitä on paljon helpompi perustella. Rationaalilukujen muodostama systeemi ei kuitenkaan riitä mihinkään, kun mennään vähänkin lihamäärien arvioinnin vaativampaan matematiikan sovellukseen. Ei voisi kuvitella nykyaikaista teknologiaa ja luonnontiedettä ilman differentiaali- ja integraalilaskentaa, mutta ei differentiaalieikä integraalilaskenta toimi, jos rajoitutaan pelkästään rationaalilukuihin. Eikä itse asiassa tarvitse mennä niin pitkälle, että törmää irrationaalilukuihin. Piirretään neliö, jonka sivun pituus on 1 yksikkö. Tällöin sen lävistäjän pituus on $\sqrt{2}$, irrationaaliluku. Jos hyväksyy neliön olemassaolon, pakko sitten hyväksyä $\sqrt{2}$:n olemassaolon.

Rationaalilukujen olemassaolo on helppo hyväksyä - jokainen rationaaliluku on kahden kokonaisluvun osamäärä $\frac{m}{n}$ ja kokonaisluvut (ainakin positiiviset ja ”tarpeeksi pienet”) melkein ”ovat olemassa” sellaisina oikeassa elämässä - lukumäärinä. Näin ollen intuitiivisesti on selvä, mikä rationaaliluku $\frac{m}{n}$ on - otetaan esimerkiksi m pizzaa ja jaetaan jokainen pizza n:ään samankokoiseen palaan. Poimitaan yksi pala jokaisesta ja siinä meillä on reaalielämän implementaatio luvusta $\frac{m}{n}$. Kuten edellä nähtiin jo, on myös suhteellisen helppoa hyväksyä JOIDENKIN irrationaalilukujen olemassaoloa, esimerkiksi neliöjuuren $\sqrt{2}$ kohdalla. Tämä ehkä antaa psykologisen syyn hyväksyä muitakin neliöjuuria ja juuria yleisesti. Riittäkö tämä? Ei riitä, koska osoittautuu, että suurin osa irrationaalilukuja eivät ole minkään rationaalilukujen juuri. Tämä nähdään tällä kursilla myöhemmin. Tilanne on jopa pahempi. Rationaalilukujen juuret $\sqrt[n]{r}$ ovat erikoistapauksia niin sanotuista *algebrallisista luvuista.* Algebrallinen luku on sellainen reaaliluku, joka on jonkun kokonaislukukertomisen polynomiyhtälön juuri. Esimerkiksi yhtälön $x^5 - x - 1 = 0$ reaalinen juuri (joka on olemassa ja yksikäsitteinen) on algebrallinen luku. Voidaan osoittaa (se on vaikeata), että tämä luku EI kuitenkaan voida ilmaistaa rationaalilukujen juurten avulla. Koska polynomiyhtälöiden ratkaiseminen on tärkeätä, tämä antaa syyn hyväksyä myös algebrallisia lukuja. Niitäkin on itse asiassa hyvin ”vähän” - suurin osa reaaliluvuista eivät ole algebrallisia. Mutta ehkä pärjämmekin ilman ei-algebrallisia lukuja, ehkä ne ovatkin turhia? Ei onnistuu - esimerkiksi kuuluisat vakiot e (Neperin luku) ja π eivät ole algebrallisia. Ne ovat kuitenkin matematiikassa niin tärkeässä asemassa, että jopa lukiomatematiikassa niistä joudutaan puhumaan ja hyväksymään. Joudutaan, koska on pakko. Tässä piilee ehkä yleinen periaate, jonka koulumatematiikka soveltaa irrationaalilukuihin - irrationaaliluvuista koulussa puhutaan ja niitä hyväksytään ”yksi kerrallaan”, silloin kun ilman niitä ei enää pärjää. Silloinkin tarkasteluun otetaan vain niitä lukuja, joita tarvitaan. Reaalilukujen joukkoa ei tarkastella kokonaisuutena. Suurin osa reaalilukuja jää ikäänkuin ”huomaamatta”. Mutta kaikkia niitä kyllä oikeasti tarvitaan - jos yksikin reaaliluku poistetaan, lukusuoran tulee ”reikä”. Yksikin tällainen reikä tekee analyysin tuloksista epätosia ja käyttökelvottomia. Näin ollen irrationaalilukujen tarvetta voidaan tiivistää sanomalla, että niitä tarvitaan ”paikantamaan reikiä” rationaalilukujen välistä. Ilma tälläistä paikaantamista ei pystytä esimerkiksi saada aikaan toimivaa differntiaali-ja integraalilaskentaa.

Yksi tämän kurssin tarkoituksia on tuoda esille reaalilukujen joukko kokonaisuutena. Itse asiassa aloitamme tarkastelu nimenomaan antamalla tarkka ja tyhjentävä matemaattinen määritelmä reaalilukujen joukolle. Tosin tämä määritelmä on *aksiomaattinen* eli se ei kerro mitä reaaliluvut ovat ja onko niitä edes olemassa, vaan ainoastaan mitä ominaisuuksia reaalilukujen joukolla ”pitäisi olla”. Määritelmä on siis kuvaileva. Eikös tämä olekaan samanlainen lähestymistapa kuin koulumatematiikassa, jonka juuri moitimme ”puutteelliseksi”? Vastaus on ”ei”, mutta eron ymmärtäminen vaatii aikaa, kokemusta ja harjoitusta. Yksi erottava tekijä on se, että määritelmämme on täsmällinen. Siinä mainitut aksioomat eivät ole ainoastaan joitakin reaalilukujen ominaisuuksia, vaan ne ovat lähtökohtia, joita hyväksymällä saadaan ilmaiseksi kaupan päällä KAIKKI reaalilukujen ominaisuudet. On kuitenkin totta, että tällainen määritelmä ei anna mitään konkreettista esimerkkiä reaalilukujen kokonaisuudesta eikä se puhuu mitään siitä, onko tällaisia ”reaalilukujoukkoja” oikeasti olemassa. Esitämme sen vain sitä varten, että voidaan sopia heti alkuun MITÄ me etsitäänkään. Sen jälkeen siirrymme varsinaiseen kurssin sisältöön, joka on reaalilukujen konstruktio. Tulemme siis oikeasti ja konkreettisesti luomaan koko reaalilukujen joukkoa - niin pitkälle kuin ”konkreettisesta olemassaolosta” ja ”luomisesta” voidaan ylipäätään puhua, kun kyse on abstrakteista käsitteistä.

Reaalilukujen konstruuktio, jonka suoritamme, etenee samaa polkua pitkin, joka on tuttu koulusta. Aloitamme luonnollisista luvuista. Seuraavaksi täydentämme niiiden joukkoa negatiivisilla kokonaisluvuilla. Seuraavaksi lisätään joukkoon rationaalilukuja. Viimeksi rationaalilukujen avulla konstruoimme reaalilukujen joukon. Matkan varrella tulemme poimimaan joukko-opista meidän tarvitsemia työkaluja. Tästä syystä joudumme myös puhumaan paljon joukoista ja niihin liityvistä matemaattisista tuloksista. Tulemme myös näyttämään, että reaalilukujen joukko on olennaisesti yksikäsitteinen.

1.2 Reaalilukujen aksioomat

Kuvitelemme, että haluamme valmistaa joku koneen tai esimerkiksi kirjoittamaan jonkun tietokoneohjelman. Tällöin meidän on tietysti aloitetaavaa antamalla jonkinlainen enemmän tai vähemmän tarkka kuvaus siitä, mitä haluamme saada aikaan. Vasta sen jälkeen kun olemme sopineet tästä voidaan työtä aloittaa. Näin ollen, jos tehtävämme on konstruoida reaalilukujen joukko, pitää ensin antaa täsmällinen *määritelmä* tälle objektille, jonka etsimme.

Yksi tapa lähestyä reaalilukuja on palauttaa mieleen, että niiden piti olla sama asia kuin desimaaliluvut. Desimaaliluku on mahdollisesti päättymätön jono, joka on muotoa

$$n, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Tässä n on jokin kokonaisluku ja pilkun jälkeen tulevat symbolit ovat, ainakin jos pysymme tutussa 10-järjestelmässä, lukuja joukosta $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On täysin mahdollista (ja sellaista on yritetty) ottaa tämä täsmällisen määritelmän lähtökohdaksi. Sovitaan vain, että reaaliluku on sama asia kuin tällainen desimaaliluku ja lähdetään siitä. Tätä ideaa kyllä pystyy muuttamaan täsmälliseksi matemaattiseksi teoriaksi. Näin ei kuitenkaan tehdä juuri koskaan, emmekä tee mekään. Syitä tähän on paljon. Ensinnäkin konstruktio on kömpelö ja sitä on vaikea käyttää teoreettiseen tutkimukseen. Miten esimerkiksi desimaalilukujen yhteenlasku määritellään? On pidettävää huoltaa "ylivuodosta", koska kahden luvun joukosta $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ summa ei pysy samassa joukossa. Jos lukumme ovat oikeasti päättymättömät, niin tällaista ylivuotoa saattaa tulee äärettömän monta kertaa, mikä varmasti tekee asioista hankalia. Kertolasku on vielä ongelmallisempi (mieti miten äärettömien pitkien desimaalilukujen kertolasku pitää määritellä) ja jakolasku muuttuu jo aivan sietämättömäksi. Jos tämä vaihe on niin hankala, miten sitten tutkimme syvällisempiä ominaisuuksia? Esimerkiksi neliöjuuren metsästäminen paljastaa samoja teknisiä vaikeuksia kuin yllä.

Toinen ongelma on siinä, että tietojemme mukaan desimaaliluvut ja reaaliluvut itse asiassa *eivät* vastaa toisiaan täysin yksikäsitteisesti. Onhan tunnetusti esimerkiksi desimaaliluku $0,9999\ldots$ sama luku kuin desimaaliluku $1,00000\ldots$. Tämä tuottaa lisää rumia teknisiä hankaluuksia.
Desimaaliluvun käsite riippuu valitusta kantaluvusta. Esimerkiksi yllä käytimme 10-järjestelmä. Mutta eihän luvussa 10 ole matemaattiselta ja objektiiviselta näkökulmasta mitään erikoista. Tuntuu omituiselta konstruoida matemaattinen teoria, joka lähtökohdaltaan perustuu osittain ei-matemaattisiin seikkoihin, kuten sen, että meillä sattuu olemaan 10 sormia. Voimme toki ottaa yleisempi näkökulma ja tarkastella desimaalilukuja minkä tahansa kantaluvun suhteen, mutta tällöin saadaan erinäköisiä reaalilukusysteemiä - yksi jokaista kantaluvun valintaa kohti. Intuitiivisesti on selvä, että niiden täytyy olla "samoja" eli jotenkin ekvivalentteja, mutta tämänkin osoittaminen suoraan desimaaliluvuilla olisi taas teknisesti vaikeata ja turhauttavaa.
Jos tälle polulle menee, niin loppujen lopuksi kuitenkin huomaa, että jos haluaa päästä joihinkin tuloksiin, niin kannattaa joka tapauksessa pikkuhiljaa siirtyä alkuperäisestä määritelmästä eli desimaaliluvuista johdettuihin tuloksiin, jotka ovat nätimpiä, yksinkertaisempia ja konseptuaalisempia. Esimerkiksi pitkien ja turhauttavien laskujen jälkeen voimme todistaa, että jokaisella nollasta eroavalla desimaaliluvulla x on käänteisluku $1/x$, eli sellainen luku, jolle pätee $x \cdot 1/x = 1$. Tästä lähtien voimme käyttää tätä eleganttia tulosta eikä ainakaan sen kohdalla tarvitse enää palata desimaalilukuihin. Mutta tällöin luonnolliseksi esille tulee kysymys "miksi ei sitten aloita koko tarkastelu näistä konseptuaalisemmista ominaisuuksista"?

Mutta suurin ongelma desimaalilukujen kanssa on tässä vaiheessa se, että jos ne ovat vastaus, niin mikä oli se kysymys? Tiedämmekö muuten, miksi

haluamme käsitellä ja konstruoida reaalilukuja omituisina äärettömän pitkinä jonoina - jos ei oteta huomioon siitä, että saatumme nyt vain koulusta ”tietää”, että näin pitäisi olla?
Ongelma on siis siinä, että me ruvettiin heti töihin ja unohdimme sen, mistä keskustelu alkoi. Me unohdimme SOPIA, mitä me etsitään.

Emme koskaan voi olla täysin tyytyväisiä mihinkään reaalilukujen konstruktioon, jos emme päätä ensin aivan tarkkaan mitä me halutaan reaalilukujen olevan. Jos emme tiedä tätä, miten voimme olla varmoja siitä, että joku konstruktiomme - esimerkiksi desimaaliluvut - antaakin ”niitä oikeita reaalilukuja”? Ehkä ne vain näyttää reaaliluvuista toistaiseksi ja huomenna niistä paljastuukin joku ominaisuus, joka ei sovi meidän kuvaan reaaliluvuista.

Tästä syystä nykymatematiikassa pyritään siihen, että kiinnitetään varsinainen huomio vain jonkun olion *ominaisuuksiin*, ei siihen, mitä se olio ”oikeasti on”. Tämä on vähän samanlainen läjestymistapa kuin olio-ohjelmoinnissa. Matemaattinen olio on ”musta laatikko” eikä matemaattikkoa kiinnostaa mikä laatikon sisällä on, vaan ainoastaan mitä tällä oliolla voi tehdä, mitä ominaisuuksia sillä on. Ei ole olemassa mitään ”oikeata”, ainoata virallista, oikeanoppista reaalilukujen joukkoa, vaan mikä tahansa objekti joka käsityksemme mukaan ”näyttää” reaalilukujen joukolta, myös oikeasti on sellainen. Mistä nämä ”käsitykset” tulevat? Ne tulevat meidän ajatuksista siitä, mitä ominaisuuksia me HALUTAAN reaaliluvuilta. Se mitä me halutaan taas tulee kokemuksesta. Vuosisatojen epäformaali matematiikan tutkimus johti siihen, että ihmisille muodostui hyvin rikas käsitys siitä, mitä ominaisuuksia reaaliluvuilla ”pitäisi” olla, niin, että esimerkiksi tavallinen algebra ja differentiaalilaskenta (joka aikoinaan ”tilattiin” fysiikan tarpeisiin) toimisivat. Tuttu psykologinen asetelma siis pitää kääntää - mitään taivasta pudonneita ”oikeita” reaalilukuja koskaan ollutkaan, vaan me yritetään päättää siitä, mitä me haluttaisimme kutsua reaaliluvuiksi ja sitten katsotaan, pystytäänkö sellaisia otuksia konstruoimaan. Me ikään kuin tehdään tilaus matematiikalle ja matematiikka puolestaan yrittää tyydyttää sitä mahdollisuuksiensa mukaan.

Tällaisen *aksiomaattisen* lähestymistavan perusidea on siis siinä, että olio tai käsite määritellään listaamalla sen ominaisuuksia. Esimerkiksi sanomme ”Auto on pyörillä liikkuva henkilöiden ja tavaran kuljetukseen tarkoitettu moottorin voimin liikkuva ajoneuvo”. Tämä määrittelee käsitteen ”auto” ja jos hyväksymme sellaisen määritelmän, sen jälkeen mikä tahansa pyörillä liikkuva henkilöiden ja tavaran kuljetukseen tarkoitettu moottorin voimin liikkuva ajoneuvo saa sanoa autoksi ja mikään muu objekti, joka ei toteuta

tätä määritelmää, ei saa sanoa autoksi.
Matematiikassa jonkun systeemin määritelmässä tällä tavalla esitettyjä ominaisuuksia tai ehtoja sanotaan *aksioomiksi*. Tälle sanalle usein esitetään määritelmäksi "itsestään selvä totuus", "tosi väite, jonka totuus on niin selvä, että sitä ei tarvitse todistaa". Nykymatematiikassa tällä sanalla on kuitenkin paljon vaatimattomampi ja käytännöllisempi merkitys - se tarkoittaa vain "lähtöoletusta". Aksiooma ei ole mikään absoluuttinen totuus jossakin objektiivisessa mielessä, eikä sen tarvitse olla itsestään selvä tai edes "totta" missä tahansa tavanomaisessa mielessä. Matemaatikko ei ole kiinnostunut siitä, ovatko aksioomat "totta", vaan häntä kiinnostaa vain mitä seurauksia aksioomeilla on. Matematiikka ei tutki mikä on totta, vaan pikemminkin tutkii "mitä jos oletamme, että tämä väite on tosi, mitä sitten?" eli loogisia seurauksia. Tästä syystä ei matematiikassa voida todistaa mitään absoluuttisesti todeksi, vaan ainoastaan suhteellisesti, joiden lähtöaksioomien olleessa tosia. Matematiikka on tiede, joka tutkii abstrakteja *malleja* eli kuvittellisia ideaalisia systeemiä, jotka määritellään aksioomien kautta.

Siirrytään nyt itse asiaan, eli reaalilukujen aksiomaattiseen määritelmään. Esitetään nykyisin käytettävä määritelmä sellaisenaan ihan kokonaisuudessaan, vaikka jokin kohta siitä saattaa jäädä epäselväksi jollekin lukijalle. Jos näin käy, ei ole mitään syytä paniikkiin - käymme läpi yksityiskohtaisesti määritelmässä esiintyviä termejä, väitteitä ja niiden merkityksiä tässä luvussa.

Määritelmä 1. *Reaalilukujen joukko on systeemi* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$*, missä* $\mathbb{R}$ *on joukko,* $+$ *ja* $\cdot$ *laskutoimituksia joukossa* $\mathbb{R}$*,* $\leq$ *relaatio joukossa* $\mathbb{R}$*, siten, että kaikki seuraavat ehdot toteutuvat.*

A(i) *Kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$ *pätee* $x + y = y + x$.

A(ii) *Kaikilla* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *pätee* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A(iii) *On olemassa alkio* $0 \in \mathbb{R}$ *siten, että* $x + 0 = x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

A(iv) *Jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *on olemassa alkio* $-x$ *siten, että* $x + (-x) = 0$.

B(i) *Kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$ *pätee* $x \cdot y = y \cdot x$.

B(ii) *Kaikilla* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *pätee* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

B(iii) *On olemassa alkio* $1 \in \mathbb{R}$*,* $1 \neq 0$ *siten, että* $x \cdot 1 = x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

B(iv) *Jokaisella* $x \in \mathbb{R}$*,* $x \neq 0$ *on olemassa alkio* x^{-1} *siten, että* $xx^{-1} = 1$.

C *Kaikilla* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *pätee* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

D(i) *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *pätee* $x \leq x$.

D(ii) *Jos alkioille* $x, y \in \mathbb{R}$ *pätee* $x \leq y$ *ja* $y \leq x$, *niin* $x = y$.

D(iii) *Olkoot* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Tällöin jos* $x \leq y$ *ja* $y \leq z$, *niin myös* $x \leq z$.

D(iv) *Kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$ *joko* $x \leq y$ *tai* $y \leq x$.

E(i) *Olkoot* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Tällöin jos* $x \leq y$, *niin* $x + z \leq y + z$.

E(ii) *Olkoot* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Tällöin jos* $x \leq y$ *ja* $0 \leq z$, *niin* $x \cdot z \leq y \cdot z$.

F *Olkoon* A *joukon* $\mathbb{R}$ *epätyhjä osajoukko ja oletetaan, että on olemassa* $z \in \mathbb{R}$ *siten, että* $a \leq z$ *kaikilla* $a \in A$. *Tällöin on olemassa* $x \in \mathbb{R}$ *siten, että*
a)$a \leq x$ *kaikilla* $x \in A$,
b)jos $y \in \mathbb{R}$ *on sellainen, että* $a \leq y$ *kaikilla* $a \in A$, *niin* $x \leq y$.

Ehtoja A-F sanomme *reaalilukujen aksioomiksi.* Aksioomaa F lukuun ottamatta kaikki määritelmässä mainitut aksioomat ovat tuttuja reaalilukujen ominaisuuksia. Aksioomat ryhmästä A kertovat meille reaalilukujen yhteenlaskun ominaisuuksia, aksioomat ryhmästä B puolestaan ilmaisevat reaalilukujen kertolaskun perusominaisuuksia. Aksiooma (C), joka tunnetaan nimellä ”osittelulaki” kertoo millä tavalla yhteen- ja kertolaskut interaktioivat keskenään.
Aksioomat ryhmästä D kertovat mitä ominaisuuksia lukujen ”pienempi kuin” käsitteellä on. Aksioomat E sanovat, että epäyhtälö säilyy kun sen molempiin puoleen lisätään sama luku tai kun se kerrotaan positiivisella luvulla. Aksiooma F on kuuluisa ”täydellisyysaksiooma”, se sanoo, että jokaiselle reaalilukujen epätyhjälle joukolle, jolla on olemassa ylärajoja, voidaan valita niistä ylärajoista pienin. Koska periaatteessa se on muotoiltu täysin lukujen järjestysrelaation termeissä, se olisi voinut olla yksi ryhmän D aksioomista. Kuitenkin sen erikoisluonteen ja tärkeyden vuoksi se eristetään muista järjestysaksioomista. Juuri aksiooma F ”tekee reaaliluvuista reaalilukuja”.

Määritelmässä esiintyy monessa kohdassa yhtäsuuruuden merkki =. Se pitää ymmärtää tavanomaisesti - alkioiden yhtäsuurutena. Merkintä $a = b$ tarkoittaa, että a ja b ovat sama olio. Esimerkiksi aksiooman A(i) merkitys voidaan tiivistää seuraavasti - aina kun otetaan kaksi lukua x ja y ja lasketaan $x + y$ ja $y + x$, niin päädytään molemmissa tapauksessa samaan reaalilukuun.

Koska määritelmän 1 melkein kaikki aksioomat ovat tuttuja ja intuitiivisesti hyvin ”itsestään selviä”, on helppo suhtautua niihin vain listana *eräistä* reaalilukujen ominaisuuksista. Täytyy kuitenkin ymmärtää olla sekoamatta jo ennestään koulusta tuttuja ”reaalilukuja” ja kaikki mitä niistä tiedämme, määritelmässä 1 mainittuihin ”reaalilukuihin”. Tässä vaiheessa on parasta ajatella, että ”reaaliluvut” on vain termi joka nyt ”sattumalta” on sama, kuin eräs ennestään tuttu käsite. Tietenkin koko tämän kurssi tavoite on osoittaa, että tämä formaalisti määritelty ”uusi” käsite on vain muodollinen ja tarkka tapa käsitellä reaalilukuja, mutta formalismi ei ota tätä mitenkään huomioon.

Sovitaan siis, että tästä lähtien käytämme nimitystä ”reaaliluvut” vain ja ainoastaan tarkoittamaan olioita, joiden muodostama kokonaisuus toteuttaa määritelmän 1. Tässä määritelmässä listatut reaalilukujen aksioomat ja niiden seurauksia, joita todistamme todeksi näistä aksioomista lähtien, on ainoata mitä saamme reaaliluvuista ”tietää” ja käyttää kussakin vaiheessa. Epäformaalisti toki voimme pitää mielessä ennestään tuttuja asioita, joita ei vielä todistettu, mutta niitä saa käyttää ainoastaan motivaationa. Kaikkeen epäformaaliin tietoon reaaliluvuista kannattaakin nyt suhtautua pikemmin ”asioina joita haluamme olevan tosia”. Sellaisina ne pysyvät, kunnes todistamme ne tarkasti.

Aloitetaan siis reaalilukuihin tutkimisen ”puhtaalta pöydältä”.
Ihan aluksi huomataan, että määritelmämme mukainen reaalilukujen muodostama kokonaisuus pitää sisällään paitsi varsinaisen reaalilukujen joukon, joka merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, myös reaalilukujen yhteen- ja kertolaskuja, sekä reaalilukujen välisen suuruusjärjestyksen. Niitä ei siis määritellä vaan ajatellaan annettuina jo valmiiksi.

Määritelmän mukaan reaalilukujen muodostama systeemi on siis nelikko $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Ei ole kuitenkaan kovin kätevää käyttää näin pitkää merkintää, minkä takia käytännössä reaalilukujen muodostamaa kokonaisuutta $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ merkitään lyhyesti $\mathbb{R}$:llä. Formaalista näkökulmasta tämä ei ole korrektia, sillä $\mathbb{R}$ on reaalilukujen muodostama joukko, ilman lisästruktuuria, jonka muodostavat laskutoimitukset $+$, $\cdot$ ja järjestysrelaatio $\leq$. Tämä on kuitenkin kirjallisuudessa ja matemaattisissa piireissä vakiintunut tapa, joten noudatamme sitä. Yleensä sekaannuksen varaa ei ole ja pärjää hyvin, kunhan muistaa, että $\mathbb{R}$:ssä on alkioiden, eli reaalilukujen, lisäksi on mukana myös struktuuri, jonka muodostavat laskutoimitukset ja järjestysrelaatio.

Laskutoimitukset. Yhteen- ja kertolasku $\mathbb{R}$:ssä ovat esimerkkejä laskutoimituksista. Yleisesti *laskutoimitus* joukossa X on mikä tahansa sääntö τ, joka liittää kahteen X:n alkioon a, b *laskutoimituksen tuloksen* $a\tau b$. Alkioiden järjestyksellä voi yleisesti ottaen olla merkitystä - $a\tau b$ voi antaa eri tuloksen kuin $b\tau a$. Laskutoimitus τ joukossa X on *vaihdannainen* jos kaikilla $a, b \in X$ pätee

$$a\tau b = b\tau a.$$

Aksioomien A(i) ja B(i) mukaan reaalilukujen yhteen- ja kertolasku ovat molemmat vaihdannaisia. Vaihdannaisuus tuntuu erittäin luonnolliselta ja itsestään selvältä, mutta se johtuu vain kokemuksesta. Matematiikkaa on täynnä ei-vaihdannaisia laskutoimituksia. Tämä johtuu siitä, että sovelluksissa yleisesti esille tuleva laskutoimitus on määritelty joidenkin "toimintojen"joukossa ja laskutoimitus AB tarkoittaa "ensin tehdään B, sitten tehdään A". Esimerkiksi jos A tarkoittaa "laita öljyä paistinpannulle" ja B tarkoittaa "heitä kananmunat paistinpannulle", AB ja BA saattavat tuottaa erilaista lopputulosta. Toinen kuuluisa esimerkki saadaan kun A on toiminta "laita housut päälle" ja B on toiminta "laita alushousut päälle". Tässä tapauksessa AB edustaa tavallisten ihmisten pukeutumistapaa, kun BA on puolestaan Teräsmiehen tapa pukeutua.
Sovitaan, että kahden reaaliluvun *tuloa* $a \cdot b$ merkitään myös yksinkertaisesti ab.

Jokainen laskutoimitus lähtökohtaisesti kertoo vain mitä tapahtuu, kun kaksi alkiota "lasketaan yhteen". Jos alkoita on enemmän kuin kaksi, täytyy käyttää sulkuja, jotta laskujen järjestys olisi yksikäsitteisesti määritelty. Esimerkiksi $(a\tau b)\tau c$ tarkoittaa, että ensin lasketaan $x = a\tau b$ ja sitten $x\tau c$. Lausekeessa $a\tau(b\tau c)$ puolestaan ensin lasketaan $y = b\tau c$ ja sitten $a\tau y$. Yleisesti ottaen ei ole mitään syytä sille, että molemmissa tapauksessa päädyttäisimme samaan lukuun. Jos näin kuitenkin aina käy, eli jos kaikilla $a, b, c \in X$ on voimassa niin sanottu *liitännäisyys*

$$(a\tau b)\tau c = a\tau(b\tau c),$$

laskutoimitus sanotaan "liitännäiseksi" tai "assosiatiiviseksi". Liitännäisyyskin tuntuu "itsestään selvältä", mutta tämäkin johtuu vain siitä, että olemme siihen tottuneita ja huomaamme sen olevan voimassa vain tapauksissa, joissa se ON luonnollinen. Esimerkiksi arkikokemus sanoo, että kun laskemme rahaa yhteen, lopputulos ei riipu siitä, missä järjestyksessä suoritamme laskuja. Mutta esimerkiksi yhtä tuttu lukujen vähennyslasku (joka ei vielä määritelty formaalisti) EI ole vaihdannainen eikä liitännäinen. Syy siihen miksi emme huomaa sitä on tietenkin siinä, että harvoin törmäämme tilanteisiin, joissa asialla olisi merkitystä (tosin merkkivirhe "laskussa" $a - (b - c) = a - b - c$, johon koululaiset usein sortuvat, saattaa johtua juuri siitä, että vähennyslasku ajatellaankin liitännäisenä alitajuisesti).

Reaalilukujen määritelmässä apiori ovat annettuja vain yhteen- ja kertolasku. Vähennyslaskusta, jakolaskusta, potensseista, logaritmeista ja niin edelleen ei sanota alkuperäisessä määritelmässä sanaakaan, joten ne pitää *määritellä erikseen.*

Reaalilukujen vähennyslasku "$-$" määritellään kaavalla $a - b = a + (-b)$, missä $-b$ on aksioomassa A(iv) mainittu alkio, niin sanottu b:n **vasta-alkio**. Samoin jakolasku "/" määritellään kaavalla $a/b = ab^{-1}$, missä b^{-1} on aksioomassa B(iv) mainittu b:n **käänteisalkio**. Koska tässä aksioomassa käänteisalkion olemassaoloa oletetaan ainoastaan kun $b \neq 0$, jakolasku voidaan määritellä vain kun jaettava $b \neq 0$ ("nollalla ei saa jakaa"). Jakolasku merkitään myös

$$a/b = \frac{a}{b}$$

.

Onko yllä annetut määritelmät vähennys- ja jakolaskulle päteviä? Itse asiassa tässä vaiheessa EIVÄT vielä olekaan. Miksi? Syy on siinä, että laskutoimituksen täytyy olla yksiselitteisesti määritelty. Aksioomasta A(iv) seuraa, että jokaisella reaaliluvulla b ON OLEMASSA vasta-alkio, eli sellainen alkio c, jolle pätee $b + c = 0$. Missään ei sanottu, että tällainen alkio on YKSIKÄSITTEINEN. Periaatteessa olisi mahdollista, että on olemassa kaksi eri alkiota c, c', jolle molemmille pätee $b + c = 0$ ja $b + c' = 0$. Tällöin erotuksen $a - b$ pitäisi tarkoittaa sekä alkiota $a + c$, että $a + c'$, eikä sitä tällöin tule välttämättä hyvinmääritelty operaatio. Sitä paitsi, jos mietitään ensin, mitä aksioomassa A(iv) mainittu symboli 0 tarkoittaa, niin sehän on alkio, jonka OLEMASSAOLO postuloidaan aksioomassa A(iii), mutta taas mikään ei takaa sitä, että tämä *nolla-alkio* 0 olisi yksikäsitteinen. Kaikki, mitä me tästä nollasta tässä vaiheessa tiedämme on se, että se toteuttaa jokaisella reaaliluvulla x yhtälön $x + 0 = 0$.
Samat ongelmat koskevat jakolaskun määritelmää - emme tiedä vielä ovatko aksioomissa B(iii) ja B(iv) mainitut alkiot 1 ja b^{-1} yksikäsitteisiä.
Tietenkin oikeasti käy niin, että kaikki nämä alkiot ovat yksikäsitteisiä, mutta tätä pitää **todistaa**.

Lemma 2. *Joukossa $\mathbb{R}$ on olemassa vain yksi alkio 0, joka toteuttaa aksiooman A(iii) ehtoa. Samoin $\mathbb{R}$:ssä on olemassa vain yksi alkio 1, joka toteuttaa aksiooman B(iii) ehtoa.*

Todistus. Olkoot 0 ja $0'$ molemmat sellaisia, että $x + 0 = x + 0' = x$ kaikilla reaaliluvuilla x.
Tällöin jos valitaan erityisesti $x = 0'$, saadaan $0' = 0' + 0$. Toisaalta, jos yhtälössä $x + 0' = x$ sijoitetaan $x = 0$, saadaan $0 + 0' = 0$. Kuitenkin aksiooman A(i) (yhteenlaskun vaihdannaisuus) nojalla $0' + 0 = 0 + 0'$. Yhdistämällä näitä tietoja saadaan ketju yhtälöitä

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0.$$

Luvun 1 yksikäsitteisyys todistetaan täsmälleen samalla tavalla (käy läpi!). □

Itse asiassa vasta nyt voimme käyttää symboleita 0 ja 1, kun olemme varmoja siitä, että kaksi eri lukua ei merkitä samalla symbolilla. Alkio 0 sanotaan nolla-alkioksi tai yksinkertaisesti nollaksi, alkio 1 sanotaan reaaliluvuksi yksi.

Lemma 3. *Jokaisen reaaliluvun b vasta-alkio $-b$, joka on määritelty aksioomassa A(iv) on yksikäsitteinen. Samoin, jos $b \neq 0$, niin b:llä on olemassa yksikäsitteinen käänteisalkio b^{-1}.*

Todistus. Olkoot c ja c' reaalilukuja, jotka toteuttavat yhtälöitä
$b + c = 0 = b + c'$. Tällöin

$$c = c + 0 = c + (b + c') = (c + b) + c' = (b + c) + c' = 0 + c' = c' + 0 = c'.$$

Huomaa, että tässä laskussa käytetään kaikki ryhmän A aksioomat hyväksi. Käänteisalkion yksikäsitteisyys nähdään samalla tavalla kertolaskun aksioomien avulla (tarkista). □

Aksioomassa B(iv) asetetaan, että kaikilla nollasta eroavilla alkiolla on olemassa käänteisalkio. Tämä on parasta mitä voidaan vaatia, sillä osoittautuu, että (muiden aksioomien ollessa voimassa) nolla-alkiolla ei voi olla käänteisalkiota. Tämä on osaa seuraavasta tuloksesta.

Lemma 4. *Jokaiselle reaaliluvulle x pätee $x0 = 0x = 0$. Luvulla 0 ei ole käänteisalkiota. Jos x, y ovat nollasta eroavia reaalilukuja, niin myös niiden tulo $xy \neq 0$ ja*

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}.$$

Todistus. Tämä on ensimmäinen kertaa, kun tarvitsemme *osittelulakia* eli aksioomaa C. Sen avulla saadaan

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Näin ollen $x \cdot 0 = y$ on sellainen reaaliluku, jolle $y + y = y$. Lisäämällä tämän yhtälön molemmille puolille vasta-alkion $-y$, saadaan

$$y = y + 0 = y + (y + (-y)) = (y + y) + (-y) = y + (-y) = 0.$$

Näin ollen $x \cdot 0 = 0$ kaikilla reaaliluvuilla x.
Osoitetaan, että 0:llä ei ole käänteislukua. Tehdään vasta-oletus - olkoon x sellainen reaaliluku, jolle $x \cdot 0 = 1$. Mutta olemme juuri näyttäneet, että $x \cdot 0 = 0$. Näin ollen päädytään yhtälöön $0 = 1$, joka on kuitenkin vastoin aksiooma B(iii).
Olkoot x, y molemmat nollasta eroavia reaalilukuja. Tällöin

$$(xy)(x^{-1}y^{-1}) = (xy)y^{-1}x^{-1} = x(yy^{-1})x^{-1} = x \cdot 1 \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

Näin ollen $x^{-1}y^{-1}$ on luvun xy käänteisalkio. Koska olemme aikaisemmin näyttäneet, että nollalla ei ole käänteisalkiota, tästä erityisesti seuraa, että $xy \neq 0$. $\square$

Huomaa, että tiedämme, että 0 ja 1 ovat eri alkioita aksioomasta B(iii), jossa se mainitaan eksplisiittisesti.

Koulussa opitut klassiset tavat ratkaista yhtälöitä perustuvat vasta-alkioiden ja käänteisalkioiden käyttöön. Nimittäin tarkastellaan lineaarista yhtälöä $x + a = b$, missä x on tuntematon. Lisäämällä yhtälön molempiin puoliin a:n vasta-alkio $-a$, saadaan $x = b - a$. Kääntäen, jos $x = b - a$, lisäämällä molempiin puoliin alkio a, saadaan $x + a = b$. Yhtälöt $x + a = b$ ja $x = b - a$ ovat siis *yhtäpitäviä*, mikä tarkoittaa sitä, että niillä on samoja ratkaisuja. Koulussa tämän tyyppistä vasta-alkion hyväksikäyttöä ilmaistaan opettamalla, että ”yhtälössä esiintyvä termi voidaan siirtää yhtälön toiselle puolelle vaihtamalla sen merkkiä”.

Samoin yhtälö, joka on tyyppiä $ax = b$, ratkaistaan kertomalla molemmat puolet a:n käänteisalkiolla a^{-1}. Tällöin tietenkin täytyy olettaa, että $a \neq 0$. Yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu $x = b/a$. Yleisemmin voidaan sanoa, että ”yhtälön molemmat puolet saa kertoa tai jakaa millä tahansa nollasta eroavalla luvulla”. Tästä seuraa kätevä ”supistussääntö” - jos $ab = ac$ ja $a \neq 0$, niin $b = c$.

Edellisessä laskussa piilee myös syys miksi ”nollalla ei saa jakaa”. Nimittäin kaikilla reaaliluvuilla a, b pätee $a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0$ (Lemma 4), joten jos nollalla saisi jakaa, tästä seuraisi, että $a = b$, eli olisi mahdollista osoittaa, että kaikki reaaliluvut ovat samoja. Tämä on kuitenkin mahdotona, sillä aksioomien

A(iii) ja B(iii) mukaan on olemassa ainakin kaksi erilaista reaalilukua - 0 ja 1. Tietysti yllä todistettu väite "0:llä ei ole käänteisalkiota" on sama asia eri tavalla ilmaistuna.

Vähennys-ja jakolasku toteuttavat koulusta tuttuja sääntöjä, kuten

$$-(-x) = x,$$

$$\begin{aligned}
a(b-c) &= ab - ac, \\
a(-b) &= (-a)b = -(ab), \\
(-a)(-b) &= ab, \\
x^{-1} &= \frac{1}{x}, \text{ jos } x \neq 0 \\
(x^{-1})^{-1} &= x, \text{ jos } x \neq 0 \\
\frac{ab}{ac} &= \frac{b}{c}, \text{ jos } a, c \neq 0, \\
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd}, \text{ jos } b, d \neq 0, \\
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}, \text{ jos } b, d \neq 0, \\
\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{b}{a}, \text{ jos } a, b \neq 0,
\end{aligned}$$

Näiden tarkat todistukset jätetään lukijalle harjoitustehtäviksi.

Systeemiä $(X, +, \cdot)$, missä X on joukko, $+$ ja $\cdot$ laskutoimituksia X:ssä, jotka toteuttavat kaikki aksioomat ryhmistä A, B ja C, sanotaan matematiikassa *kunnaksi*. Reaalilukujen joukko on siis esimerkki kunnasta. Kaikki tähän menneessä todistetut reaalilukujen ominaisuudet ovat voimassa missä tahansa kunnassa. Tämän näkee, kun huomaa, että tähän mennessä olemme käyttäneet ainoastaan aksioomia A, B ja C. Myös vähennyslasku ja jakolasku voidaan määritellä missä tahansa kunnassa - samoine ominaisuuksine. Vähennyslasku tarjoaa esimerkin laskutoimituksesta, joka ei ole vaihdannainen tai liitännäinen. Miten voimme nähdä sen tässä vaiheessa? Tietysti esimerkiksi

$$7 - (5-2) = 7 - 3 = 4 \neq 0 = (7-5) - 2,$$

mutta emme vielä määrittelet mitä symbolit $2, 5, 7$ tarkoittaa, emmekä "tiedä" sellaisia ominaisuuksia kuin $7-3 = 4$. Yritetään pärjätä toistaiseksi ilman niitä. Tässä vaiheessa ainoat konkrettiset reaaliluvut, joista olemme tietoisia, ovat 1 ja 0. Vasta-alkion määritelmän mukaan $1 - 1 = 1 + (-1) = 0$, joten $1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1 + (-0)$. Nyt pitäisi päätellä, mikä on 0:n vasta-alkio -0. Vasta-alkion määritelmän mukaan se on 0, sillä $0 + 0 = 0$ aksiooman A(iii) nojalla. Näin ollen

$$1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1 + (-0) = 1 + 0 = 1,$$

missä käytimme 0:n määritelmää aksioomasta A(iii) viimeisessä yhtälössä.
Lasketaan seuraavaksi $(1 - 1) - 1$. Tiedämme jo, että $1 - 1 = 0$, joten

$$(1 - 1) - 1 = 0 + (-1) = -1.$$

Jotta tästä voisi päätellä, että $1 - (1 - 1) \neq (1 - 1) - 1$, pitäisi vielä osoittaa, että $1 \neq -1$. Tämän osoittamiseksi itse asiassa yhteen- ja kertolaskun (eli kunnan) aksioomat eivät enää riitä, vaan tarvitaan reaalilukujen suuruusjärjestyksen ominaisuuksia eli aksioomia D ja E.
Miten voidaan olla varmoja, että kunta-aksioomat eivät riitä osoittamaan, että $1 \neq -1$? Konstruoimalla esimerkki kunnasta, eli systeemistä $(X, +, \cdot)$, joka toteuttaa kaikki aksioomat A, B, C, mutta jossa pätee $1 = -1$. Tämä on esimerkki yleisestä periaatteesta, jota soveltamalla voidaan osoittaa, että jokin väite EI seuraa joistakin aksioomista. Konstruoidaan niin sanottu **malli**, jossa kaikki aksioomat ovat voimassa, mutta väite on epätosi.
Esimerkiksi kelpaa seuraava konstruktio. Otetaan $X = \{0, 1\}$ eli joukko jossa on tasan kaksi alkiota. Merkitsemme sen alkiot symboleilla 0 ja 1 kätevyyden vuoksi, kyse ei ole reaaliluvuista 0 ja 1. Määrittelemme laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ kaavoilla

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1,$$

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 1 = 1.$$

Tällöin $(X, +, \cdot)$ on kunta (harjoitustehtävä), jossa alkion 1 vasta-alkio on 1. Jos väite $1 \neq -1$ olisi kuntaaksioomien A, B, C seuraus, se olisi totta jokaisessa kunnassa, mutta X on juuri esimerkki kunnasta, jossa A, B, C ovat voimassa, mutta väite $1 \neq -1$ ei ole.

Suuruusjärjestys.
Reaalilukujen suuruusvertailu on esimerkki **relaatiosta**. Relaatio joukossa X on mikä tahansa kokoelma R järjestettyjä pareja (a, b), missä $a, b \in X$. Jos pari kuuluu relaatioon R, tämä merkitään aRb ja sanotaan, että ”a on relaatiossa b:n kanssa” Käsitteen tarkkaan määritelmään palataan seuraavassa luvussa, kun puhutaan joukko-opista yleisesti.
Jos kahdelle reaaliluvulle a ja b pätee $a \leq b$ sanomme, että a on *pienempi tai yhtä suuri* kuin b. Ryhmän D aksioomissa listataan tyypillisiä asioita, mitä

suurusjärjestykseltä voisi odottaa. Aksiooma D(i) sanoo, että jokainen luku on pienempi tai yhtä suuri itseensä kanssa. Aksiooma D(ii) sanoo, että jos x on pienempi tai yhtä suuri kuin y ja y on pienempi tai yhtä suuri kuin x, niin x ja y ovat sama luku. Aksiooma D(iii) sanoo, että jos x on pienempi tai yhtä suuri kuin y ja y on pienempi tai yhtä suuri kuin z, niin x on pienempi tai yhtä suuri kuin z. Viimein aksiooma D(iv) sanoo, että kahdesta luvusta toinen on aina pienempi tai yhtä suuri kuin toinen. Toisin sanoen kaikki luvut voidaan vertailla keskenään.
Muita tuttuja järjestykseen liittyviä käsitteitä määritellään valmiiksi annetun relaation $\leq$ avulla. Sanomme, että x on *(aidosti) pienempi* kuin y, merkitään $x < y$, jos $x \leq y$ ja $x \neq y$. Sanomme, että x on *suurempi tai yhtä suuri* kuin y, merkitään $x \geq y$, jos $y \leq x$. Luonnollisesti x on *(aidosti) suurempi* kuin y, merkitään $x > y$, jos $x \geq y$ ja $x \neq y$.
Kaikki nämä johdannaiset käsitteet toteuttavat ominaisuuksia, jotka ovat sukua järjestysrelaation $\leq$ aksioomille.

Lemma 5. *"Pienempi kuin" relaatio $<$ toteuttaa seuraavia ehtoja.*

D'(i) $x < x$ *ei päde millään* $x \in \mathbb{R}$.

D'(ii) *Olkoot* x, y *reaalilukuja. Tällöin päde täsmälleen yksi seuraavista väitteistä:*

$$x < y \text{ tai } x = y \text{ tai } y < x.$$

D'(iii) *Olkoot* x, y, z *reaalilukuja. Jos* $x < y$ *ja* $y < z$, *niin* $x < z$.

E'(i) *Olkoot* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Tällöin jos* $x < y$, *niin* $x + z < y + z$.

E(ii) *Olkoot* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Tällöin jos* $x < y$ *ja* $0 < z$, *niin* $x \cdot z < y \cdot z$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

On mahdollista ottaa relaatio $<$ lähtökohdaksi reaalilukujen määritelmässä. Tällöin aksioomat D(i)-D(iv) ja E(i)-E(ii) korvataan määritelmässä edellisen lemman väitteillä D"s(i)-D'(iii) ja E'(i)-E'(ii). Pienempi tai yhtä suuri relaatio $\leq$ tällöin *määritellään* ehdoilla $x \leq y$ jos ja vain jos $x < y$ tai $x = y$. Jotta olisimme varmoja, että tällä tavalla saatu määritelmä on ekvivalentti määritelmän 1 kanssa, täytyy osoittaa, että aksioomat D-E ja D'-E' ovat yhtäpitäviä, eli toiset niistä voidaan osoittaa, jos toiset oletetaan. Yllä osoitimme, että aksioomat D-E implikoivat aksioomia D'-E'. Käänteisen väitteen osoittaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Itse asiassa aksiooma D'(i) on turha, sillä se seuraa aksioomasta D'(ii).

Reaaliluku x on *positiivinen* jos $x > 0$ ja negatiivinen jos $x < 0$. Lukua, joka ei ole negatiivinen sanotaan ei-negatiiviseksi.

Aksioomat E kertovat miten järjestysrelaatio sopii yhteen reaalilukujen laskutoimitusten kanssa. Aksiooma E(i) sanoo, että epäyhtälön molemmille puolille voidaan lisätä mikä tahansa luku. Koska luvun vähentäminen on sama asia kuin vasta-luvun lisääminen, myös luvun vähentäminen epäyhtälön molemmilta puolelta säilyttää epäyhtälön. Näin ollen epäyhtälöt $a \leq b$ ja $a + c \leq b + c$ ovat aina yhtäpitäviä. Tätä ominaisuutta käytetään hyväksi, kun ratkaistaan epäyhtälöitä.
Aksiooma E(ii) sanoo, että epäyhtälö voidaan kertoa *ei-negatiivisella luvulla* eli jos $a \leq b$ ja $c \geq 0$, niin $ac \leq bc$. Tietysti jos tässä $c = 0$, saatu epäyhtälö on muotoa $0 \leq 0$ eikä välttämättä enää ole yhtäpitävä edellisen kanssa. Jos kuitenkin $c > 0$ on positiivinen luku, voidaan epäyhtälö $ac \leq bc$ kertoa molemmilta puolilta käänteisluvulla c^{-1}, jolloin päästään takaisin epäyhtälöön $a \leq b$. Näin ollen *epäyhtälön molempien puolten kertominen positiivisella luvulla tuottaa yhtäpitävän epäyhtälön.* Tätäkin ominaisuutta sovelletaan käytännössä, kun ratkaistaan epäyhtälöitä.
Koulusta tiedetään, että epäyhtälön kertominen negatiivisella luvulla ”kääntää epäyhtälön suunnan”. Tämän täsmällinen todistus aksioomista lähtien on osa seuraavaa lemmaa.

Lemma 6. *(i) Luku x on positiivinen jos ja vain jos $-x$ on negatiivinen.*

(ii) Luku x on ei-negatiivinen jos ja vain jos se on positiivinen tai nolla.

(iii) Kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen luku.

(iv) Kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen luku.

(v) Positiivisen ja negatiivisen luvun tulo on negatiivinen.

(vi) Jos $a \leq b$ ja $c < 0$, niin $ac \geq bc$.

(vii) Luku 1 on positiivinen.

Todistus. Aloitetaan näyttämällä, että kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen. Olkoot a, b positiivisia lukuja. Tällöin erityisesti $a > 0$ ja $b > 0$. Aksiooman E'(ii) (Lemma 5) nojalla, koska $b > 0$, voimme kertoa b:llä epäyhtälö $a > 0$ ja saadaan

$$ab > 0b = 0.$$

Näin ollen $ab > 0$ ja väite (iii) on todistettu.
Seuraavaksi olkoon $a < 0$ ja $b > 0$. Tällöin taas aksiooman E'(ii) avulla

saadaan

$$ab < a \cdot 0 = 0,$$

joten $ab < 0$. Väite (v) on todistettu.
Osoitetaan seuraavaksi, että jos $x > 0$, niin $-x < 0$.
Lisäämällä epäyhtälön $0 < x$ molemmille puolille luku $-x$ (aksiooma E'(i)) saadaan

$$-x < x + (-x) = 0.$$

Näin ollen jos x on positiivinen, $-x$ on negatiivinen. Täsmälleen samalla tavalla nähdään, että jos x on negatiivinen, niin $-x$ on positiivinen. Tästä myös seuraa, että jos $-x$ on negatiivinen, niin $x = -(-x)$ on positiivinen. Näin ollen väite (i) on tosi.
Olkoot seuraavaksi a, b molemmat negatiivisia. Tällöin $-a$ ja $-b$ ovat edellisen nojalla positiivisia. Mutta $ab = (-a) \cdot (-b)$ ja, koska olemme jo näyttäneet, että kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen, saadaan, että $ab > 0$. Väite (iv) on osoitettu.
Aksiooman D(ii) nojalla jokaiselle reaaliluvulle pätee $x \leq 0$ tai $x \geq 0$. Jos $x = 0$, niin $x \cdot x = x^2 = 0$. Jos $x > 0$, xx on kahden positiivisen luvun tulo, siis positiivinen. Jos $x < 0$, xx on kahden negatiivisen luvun tulo, siis taas positiivinen. Olemme todistaneet, että jokaisen reaaliluvun x *neliö* $x^2 = xx$ on ei-negatiivinen, $xx \geq 0$. Lisäksi, jos $x \neq 0$, pätee $x^2 > 0$.
Kun sovelletaan tätä tietoa lukuun $x = 1$, saadaan $1 = 1 \cdot 1 > 0$. Väite (vii) on osoitettu.
Oletetaan, että $a \leq b$ ja $c < 0$. Tällöin $-c > 0$. Kertomalla epäyhtälö $a \leq b$ positiivisella luvulla $-c$ (aksiooma E(ii)), saadaan

$$-(ac) = a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) = -(bc).$$

Lisäämällä tähän epäyhtälöön luku ac saadaan $0 \leq ac - bc$, mistä taas lisäämällä bc saadaan $bc \leq ac$. Epäyhtälön suunta on vaihtunut, mitä pitikin todistaa.
Väitteen (ii) osoittaminen ja väitteen (i) todistuksen vieminen loppuun jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Kaikki tähän mennessä todistetut reaalilukujen ominaisuudet ovat toki tunnettuja jokaiselle koulusta. Tarkoitus ei tietenkään ole siinä, että esitetään ne uutena asiana. Pikemminkin tarkoitus on näyttää, miten näitä ominaisuuksia voidaan johtaa lähtemällä vain yksinkertaisista reaalilukujen määritelmässä mainituista formaaleista ominaisuuksista. Näiden koulusääntöjen on pakko olla voimassa jokaiselle systeemille joka toteuttaa aksioomat, riippumatta siitä, mitä systeemin alkiot eli luvut 'oikeasti ovat'. Sillä ei ole mitään merkitystä.

Palataan aikaisemmin esille tulleen ongelmaan - mistä tiedämmekin, että reaalilivut 1 ja -1 ovat eri lukuja? Nyt kun käytössämme on järjestysrelaation ominaisuuksia, voimme helposti osoittaa tämän. Nimittäin Lemmasta 6 seuraa, että $1 > 0$ ja $0 > -1$. Lemman 5 nojalla (aksiooma D'(iii)) nojalla $1 > -1$, joten erityisesi $1 \neq -1$ (relaation $>$ määritelmä). Reaalilukujen välisen lineaarisen järjestysrelaation avulla voimme mieltää reaalilukuja geometriseksi "lukusuoraksi". Emme tee tällä kurssilla tätä mielikuvaa matemaattisen täsmälliseksi, vaan käytämme sitä epäformaalisti havainnollistamiseen.

Seuraavaksi osoitetaan, että reaalilukusuora on "tiheä" eli kahden reaaliluvun välistä aina löytyy kolmas luku. Tätä varten määrittelemme ensin reaaliluvun 2 ("kaksi") kaavalla $2 = 1 + 1$.
Huomataan heti alkuun, että $2 \neq 0$, sillä muuten yhtälöstä $1+1 = 0$ saadaan yhtälö $1 = -1$, joka todistettiin jo mahdottomaksi yllä. Erityisesti luvulla 2 voidaan jakaa.
Itse asiassa 2 on positiivinen luku, sillä

$$2 = 1 + 1 > 1 + 0 = 1 > 0.$$

Lemma 7. *Olkoot a, b reaalilukuja ja $a < b$. Tällöin*

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Erityisesti a:n ja b:n välissä on ainakin yksi reaaliluku.

Todistus. Ensin huomataan, että

$$2a = (1 + 1)a = 1a + 1a = a + a < a + b$$

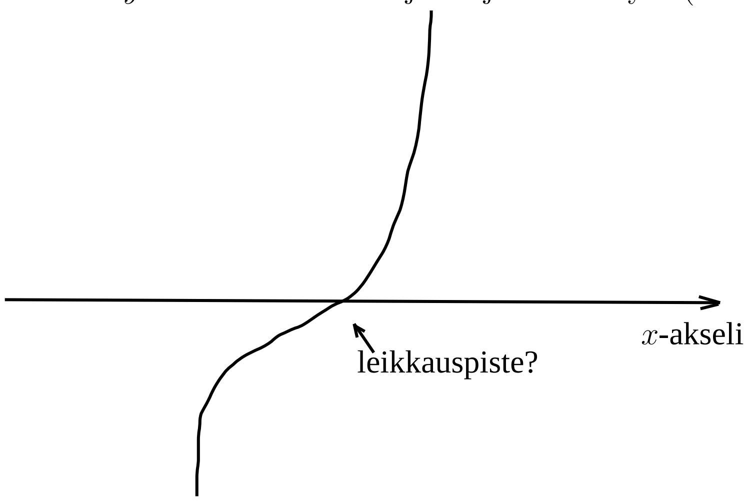
oletusten nojalla. Jakamalla epäyhtälö positiivisella luvulla 2, saadaan

$$a < \frac{a+b}{2}$$

eli väitteen toinen puoli. Toinen puoli todistetaan samalla tavalla. □

Systeemiä $(X, +, \cdot, \leq)$, joka toteuttaa määritelmän 1 aksioomia A-E (eli kaikki paitsi aksioomaa F) sanotaan *järjestetyksi kunnaksi.* Reaaliluvut siis muodostavat järjestetyn kunnan. Myös rationaaliluvut muodostavat järjestetyn kunnan, mutta tämä kunta ei toteuta aksioomaa F.

Täydellisyysaksiooma.
Niin sanottu täydellisyysaksiooma F on reaalilukujen aksioomista kaikista erikoisin, monimutkaisin ja vieras intuitiivisella tasolla.
Täydellisyysaksiooman sisältämä väite liittyy lukusuoran "jatkuvuuteen" ja "täyteläisyyteen". Se takaa sen, että lukusuorasta ei löydy "reikiä".
Piirretään xy- koordinaatistossa jokin jatkuva käyrä (kts. kuva).



Kuvitellaan, että olemme suoralla laskulla selvittäneet, että jossakin kohdassa käyrä sijaitsee x-akselin alapuolella ja jossakin toisessa kohdassa taas sen yläpuolella. Esimerkiksi jos käyrä on funktion $x^3 - 2$ kuvaaja, niin tiedämme, että arvoa $x = 0$ vastaa negatiivinen y:n arvo -2 ja arvoa $x = 2$ vastaa positiivinen y:n arvo 6. Intuitiomme sanoo, että käyrä ainakin näyttää "jatkuvalta", joten jossakin pisteessä 0:n ja 2:n välillä tämä käyrä väistämättä leikkaa x-akselin.
Ilman tämäntyyppisiä argumentteja ei nykyaikaista analyysiä ja differentiaalilaskentaa pysty kehittämään ja soveltamaan. Kuitenkin tällaisia väitettä ei voida todistaa matemaattisen tarkasti ilman täydellisyysaksioomaa. Syy tähän on siinä, että rationaaliluvuille tämä periaate ei päde, vaikka rationaalilukujen muodostama joukko toteuttaa kaikki reaalilukujen aksioomia, paitsi täydellisyysaksiooman. Tästä puhutaan myöhemmin tarkemmin, kun päästämme rationaalilukuihin.

Tarkastellaan nyt aksiooman F sisältöä tarkemmin. Olkoon A jokin reaalilukujen osajoukko eli jokin kokoelma reaalilukuja. Reaaliluku x sanotaan joukon A *ylärajaksi* jos $a \leq x$ kaikilla $a \in A$ eli jos x on suurempi tai yhtä suuri kuin kaikki A:n alkiot. Vastaavasti x on A:n alaraja jos $a \geq x$ kaikilla $a \in A$. Joukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos sillä on ainakin yksi yläraja ja *alhaalta rajoitettu*, jos sillä on ainakin yksi alaraja. Joukkoa, joka on rajoitettu sekä ylhäältä, että alhaalta, sanotaan *rajoitettu*.

Koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on esimerkki joukosta, joka ei ole rajoitettu ylhäältä eikä alhaalta. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että jokaiselle reaaliluvulle r pätee $r-1 < r < r+1$. Näin ollen mikään $r \in \mathbb{R}$ ei voi olla koko $\mathbb{R}$:n yläraja tai alaraja.

Olkoon edelleenkin A jokin $\mathbb{R}$:n osajoukko. Joukon A alkio $a \in A$ on A:n *pienin alkio*, jos $a \leq x$ kaikilla $x \in A$. Vastaavasti a on A:n *suurin alkio*, jos $x \leq a$ kaikilla $x \in A$. Jos pienin tai suurin alkio on olemassa, se on välttämättä yksikäsitteinen. Tämä seuraa aksioomasta D(iii). Pienin tai suurin alkio ei välttämättä ole olemassa, vaikka joukko olisi rajoitettu ylhäältä tai alhaalta.

Esimerkiksi positiivisten reaalilukujen joukko on alhaalta rajoitettu, sillä 0 on sen alaraja. Se on epätyhjä, koska 1 on positiivinen reaaliluku. Siinä ei kuitenkaan ole pienintä lukua. Tämä seuraa lemmasta 7. Nimittäin, jos a on positiivinen reaaliluku, on olemassa vielä pienempi positiivinen reaaliluku b, esimerkiksi $b = a/2$.

Täydellisyysaksiooma sanoo F seuraavaa. Olkoon A ylhäältä rajoitettu joukko. Määritelmän mukaan se tarkoittaa sitä, että sillä on ainakin yksi yläraja, eli A:n ylärajojen joukko B ei ole tyhjä. Täydellisyysaksiooma väittää, että tällöin B:llä on pienin alkio, eli kaikista A:n ylärajoista voidaan poimia pienin.

Tällaista joukon A pienintä ylärajaa sanotaan joukon A *supremumiksi* ja merkitään $\sup A$. Täydellisyysaksiooma siis sanoo, että jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on olemassa supremum. Koska supremum on erään joukon pienin alkio, se on yksikäsitteinen.

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä alhaalta rajoitetun joukon A *infimuminin.* Se on *suurin* A:n alarajoista ja se merkitään $\inf A$. Infimumin olemassaoloa ei tarvitse olettaa erikseen, sillä se seuraa täydellisyysaksioomasta.

Lemma 8. *Olkoon A epätyhjä ja alhaalta rajoitettu reaalilukujen osajoukko. Tällöin* $\inf A$ *on olemassa ja yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon B joukon A alarajojen muodostama joukko. Tällöin se on epätyhjä (koska A on alhaalta rajoitettu). Lisäksi B on ylhäältä rajoitettu, sillä jokainen A:n alkio on B:n yläraja.

Täydellisyysaksiooman mukaan on olemassa $x = \sup B$. Osoitetaan, että itse asiassa $x = \inf A$.

Ensin osoitetaan, että x on A:n alaraja eli kaikilla $a \in A$ pätee $x \leq a$. Mutta jokainen $a \in A$ on B:n yläraja. Koska x on *pienin* yläraja, sen täytyy olla pienempi tai yhtä suuri kuin kaikki muut ylärajat. Erityisesti $x \leq a$ kaikilla $a \in A$.

Seuraavaksi osoitetaan, että x on suurin alaraja. Olkoon y jokin A:n alaraja. Tällöin y on joukossa B. Mutta x on B:n yläraja (pienin sellainen), joten $y \leq x$. Näin ollen x on A:n alarajoista suurin. $\square$

Täydellisyysaksiooman tyypillinen sovellus liittyy irrationaalilukujen olemassaoloon. Esimerkiksi ilman täydellisyysaksiooma ei voida osoittaa, että $\sqrt{2}$ on olemassa.

Lemma 9. *On olemassa yksikäsitteinen positiivinen reaaliluku x jolle $x^2 = 2$.*

Todistus. Symboli x^2 tuli jo esille aikaisemmin. Se tarkoittaa samaa asiaa kuin $x \cdot x$.
Olkoon A sellainen $\mathbb{R}$:n osajoukko, jonka muodostavat kaikki positiiviset reaaliluvut a joille $a^2 < 2$.
Väite 1: A on epätyhjä.
Väitteen 1 todistus: Luku 1 on A:ssä, koska 1 on positiivinen ja $1^2 = 1 < 1 + 1 = 2$.
Väite 2: A on ylhäältä rajoitettu.
Väitteen 2 todistus: Olkoon a sellainen positiivinen reaaliluku jolle $a^2 < 2$. Osoitetaan, että $a < 2$. Tehdään vasta-oletus, mitä jos $a \geq 2$. Tällöin kuitenkin $a^2 \geq 2 \cdot 2 \geq 2 \cdot 1 = 2$, mikä on ristiriita A:n määritelmän mukaan. Näin ollen ainakin luku 2 on joukon A yläraja.

Väitteistä 1, 2 ja täydellisyysaksioomasta seuraa, että on olemassa $x = \sup A$. Osoitetaan, että $x^2 = 2$. Riittää näyttää, että oletukset $x^2 < 2$ ja $x^2 > 2$ molemmat johtavat ristiriitaan.
Tarkastellaan ensin tapausta $x^2 < 2$. Tällöin $r = 2 - x^2$ on positiivinen luku. Olkoon $\varepsilon > 0$ jokin positiivinen luku. Tällöin $x < x + \varepsilon$, joten $x + \varepsilon$ ei voi olla A:n alkio (x olisi tällöin sen yläraja!). Haluttu ristiriita löydetään, jos pystytään osoittamaan, että kuitenkin on olemassa $\varepsilon > 0$ jolle $x + \varepsilon \in A$. Tätä varten huomataan, että

$$(x + \varepsilon)^2 = x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Tutun muistikaavan $(a + b)^2 = a^2 + 2a + b^2$ tarkka osoittaminen jätetään harjoitustehtäväksi.
Yllä osoitimme, että 2 on eräs yläraja joukolle A. Koska x on pienin yläraja, pätee $x \leq 2$. Näin ollen

$$x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 \leq (2 - r) + \varepsilon(4 + \varepsilon) < (2 - r) + 5\varepsilon,$$

jos oletamme, että lisäksi $\varepsilon < 1$. Tässä $4 = 2 \cdot 2$ ja $5 = 4 + 1$, joka tapauksessa molemmat positiivisia lukuja. Nyt jos $\varepsilon > 0$ on sellainen, että $5\varepsilon < r$, eli $\varepsilon < r/5$, saadaan

$$(x + \varepsilon)^2 < 2 - r + r = 2,$$

mikä on haluttu ristiriita. Jäljellä on vain sen osoittaminen, että on olemassa positiivinen luku $\varepsilon > 0$, jolle pätee sekä $\varepsilon < 1$, että $\varepsilon < r/5$. Tämä seuraa Lemmasta 7. Tarkemmin se nähdään seuraavasti. Reaalilukujen aksioomista D(iv) seuraa, että joko $1 \leq r/5$ tai $r/5 \leq 1$. Merkitään pienempi näistä luvuista $u = \min\{1, r/5\}$. Tällöin erityisesti $u \leq 1$ ja $u \leq r/5$. Koska u on yksi luvuista 1, $r/5$, se on positiivinen. Lemman 7 nojalla on olemassa ε lukujen 0 ja u välillä. Tällöin $\varepsilon > 0$ ja $\varepsilon < u \leq 1$ ja $\varepsilon < u \leq r/5$.

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta $x^2 > 2$ ja osoitetaan, että tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $x' = x - \varepsilon > 0$ ja $x'^2 > 2$. Luku $x' = x - \varepsilon$ on tällöin joukon A yläraja. Tämä nähdään vasta-oletuksella. Oletetaan, että on olemassa $y \in A$ siten, että $y > x'$. Tällöin (aksiooma E(ii), kaikki tarkasteltavat luvut positiivisia),

$$y^2 \geq yx' \geq x'^2 > 2,$$

mikä on ristiriita, koska y on A:n alkio. Näin ollen $x' = x - \varepsilon$ todellakin on A:n yläraja. Mutta, koska $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon < x$, mikä on ristiriita sen kanssa, että x on *pienin* yläraja.

Jäljellä on siis sen osoittaminen, että jos $x^2 > 2$, niin voidaan löytää $\varepsilon > 0$ siten, että $x' = x - \varepsilon > 0$ ja $x'^2 > 2$. Ensimmäinen ehto toteutuu, kunhan $\varepsilon < x$. Merkitään $t = x^2 - 2$, tällöin $t > 0$. Laskemalla nähdään, että

$$(x - \varepsilon)^2 = x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 > x^2 - 2\varepsilon x \geq (2 + t) - 4\varepsilon = 2 + (t - 4\varepsilon).$$

Tässä käytimme hyväksi sitä, että $\varepsilon^2 > 0$ ja $x \leq 2$ (2 oli eräs yläraja, x on taas pienin yläraja). Jos nyt valitaan positiivinen luku $\varepsilon > 0$ siten, että $\varepsilon < t/4$ ja samalla $\varepsilon < x$ (se on mahdollista Lemman 7 nojalla), niin $t - 4\varepsilon > 0$, joten ylläolevan laskun mukaan

$$(x - \varepsilon)^2 > 2 + (t - 4\varepsilon) > 2.$$

Molemmat vaihtoehdot $x^2 < 2$ ja $x^2 > 2$ johtavat ristiriitaan. Lemman 5 nojalla ainoa jäljellä oleva mahdollisuus on, että $x^2 = 2$.
Luvun x yksikäsitteisyys jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että jokaisella positiivisella luvulla on (yksikäsitteinen) neliöjuuri tai itse asiassa minkä tahansa kertaluvun juuri. Palataan tähän kurssin loppupuolella.
Mistä muuten tiedämme, että täydellisyysaksiooma on välttämätön esimerkiksi $\sqrt{2}$:n olemassaololle? Tämä seuraa, jos pystymme keksimään esimerkin

järjestystä kunnasta (joka siis toteuttaa kaikki $\mathbb{R}$:n aksioomat, paitsi mahdollisesti täydellisyyttä), jossa yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisuja. Tällainen on esimerkiksi rationaalilukujen järjestetty kunta. Emme osoita tätä nyt, sillä emme vielä edes määritelleet mikä on "rationaaliluku" formaalilla tasolla. Palataan asiaan rationaalilukujen yhteydessä myöhemmin.

Olemme onnistuneet näyttämään kuinka käytännössä kaikki meille tunnetut reaalilukujen algebralliset ominaisuudet ja niihin liittyvät säännöt voidaan johtaa lähtemällä määritelmässä 1 annetuista perusominaisuuksista. Se on tietysti erittäin hyödyllistä tietoa, mutta avoimeksi jää kysymykset
1) onko määritelmässä 1 mainittuja "reaalilukujen systeemiä" olemassa?
2) onko tällainen systeemi jossakin mielessä "yksikäsitteinen"?
Vastaus molempiin kysymykseen on "kyllä" ja tämän osoittaminen on tämän kurssin varsinainen tavoite.
Päämäärämme on siis seuraava tulos. Jos et muista, mitä sanat 'kuvaus' ja 'bijektiivinen' tarkoittavat, ei mitään hätää – näitä käsitteitä kerätään seuraavassa luvussa.

Lause 10. *On olemassa systeemi $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, joka toteuttaa määritelmää 1. Lisäksi jos $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ja $(\mathbb{R}', +', \cdot', \leq')$ molemmat toteuttavat määritelmän 1 aksioomia, on olemassa yksikäsitteinen bijektiivinen kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, siten, että $f(0_R) = 0_{\mathbb{R}'}$ ja $f(1_R) = 1_{\mathbb{R}'}$ ja kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ pätee*

$$f(a + b) = f(a) +' f(b),$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot' f(b),$$

ja jos $a \leq b$, niin $f(a) \leq f(b)$.
Tällaista kuvausta sanotaan isomorfismiksi.

Järjestettyä kuntaa, joka toteuttaa täydellisyysaksioomaa F sanotaan täydelliseksi järjestetyksi kunnaksi. Lause 10 voidaan siis muotoilla lyhyesti seuraavasti.

Lause 11. *Isomorfiaa vaille on olemassa tasan yksi täydellinen järjestetty kunta.*

Tietysti, kun kyse on abstrakteista käsitteistä, ei ole täysin selvää, mitä "olemassaolo" tarkoittaa. Missä mielessä osoitamme, että reaalilukuja on olemassa? Rehellinen vastaus on seuraava - osoitamme, että Lause 10 on tosi tavanomaisessa joukko-opissa, jota pidetään nykymatematiikan perustana. Täysin täsmällinen tapa ilmastaa tätä ajatusta olisi seuraava - jos hyväksymme tämän "joukko-opin" aksioomia "todeksi", niin myös Lause 10 on tällöin

väistämättä tosi.
Tämä havainto on samalla hyvä syy siirtyä seuraavan aiheeseen eli joukko-oppiin.