Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 6
2.-3.5.2013

1. Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, jos on olemassa vakio $L < \infty$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ kaikille } x, y \in [a, b].$$

Osoita, että jokainen Lipschitz-funktio on rajoitetusti heilahteleva.

2. Määritellään $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, kun $0 < x \leq 1$, ja $f(0) = 0$. Osoita, että f on jatkuva, muttei rajoitetusti heilahteleva.

3. Todista, että jos $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat rajoitetusti heilahtelevia, niin fg on rajoitetusti heilahteleva.

4. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva ja $V(x) = V_f(a, x)$, kun $x \in [a, b]$.Todista, että
(a) f on jatkuva, jos ja vain jos V on jatkuva,
(b) f on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain jos V on absoluuttisesti jatkuva.

5. Todista, että jokainen absoluuttisesti jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva.

6. Todista, että jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, $E \subset [a, b]$ ja $m(E) = 0$, niin $m(f(E)) = 0$.