Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 5
25.-26.4.2013

1. Osoita, että jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin $Mf(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuuluu heikkoon L^1- avaruuteen weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$, jos f on mitallinen ja on olemassa $c < \infty$ siten, että

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) \leq \frac{c}{t} \text{ kaikilla } t > 0.$$

Todista, että
(a) $L^1(\mathbb{R}^n) \subset$ weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$,
(b) weak-$L^1(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia siten, että

$$m(A \cap B(x, 1/i)) \leq m(B \cap B(x, 1/i)) \text{ kaikilla } x \in A, i \in \mathbb{N}.$$

Todista, että $m(A) \leq m(B)$.

4. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on huokoinen, jos on olemassa $c > 0$ siten, että kaikille $x \in A$ ja $\delta > 0$ löytyy $y \in \mathbb{R}^n$ ja $0 < r < \delta$, joille $B(y, cr) \subset B(x, r) \setminus A$. Todista, että $m(A) = 0$, jos A on huokoinen.

5. Olkoon $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ns. Heavisiden funktio: $H(x) = 0$, kun $x < 0$, $H(0) = 1/2$ ja $H(x) = 1$, kun $x > 0$. Osoita, että

$$H(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} H(t)dt$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mutta $0 \notin Leb(H)$. Selitä, miksi.

6. Todista Steinhausin lause: jos $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen ja $m(E) > 0$, niin on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$(-\epsilon, \epsilon) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}.$$

Vihje: Tapoja on monia, mutta voit esimerkiksi käyttää tiheyspistelausetta ja seuraavaa ideaa: jos $A \subset (a, b)$ ja A:n mitta on tarpeeksi iso, niin joukot A ja $A + z$ eivät voi erillisiä, kun $|z|$ on tarpeeksi pieni.