Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 4
18.-19.4.2013

1. Olkoot $1 \leq p < \infty$ ja $f, f_k \in L^p(X), k \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos $f_k \to f$ m.k. ja $\|f_k\|_p \to \|f\|_p$, niin $f_k \to f$ L^p:ssä.
Vihje: Käytä Fatou'n lemmaa funktioihin $g_k = 2^p(|f|^p + |f_k|^p) - |f - f_k|^p$.

2. Osoita, että kaikille $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on

(a) $f * g = g * f$,

(b) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

3. Määritä $f * g$, kun $f = \chi_{(-a,a)}$ ja $g = \chi_{(-b,b)}$ sekä $0 < b \leq a$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $g_\epsilon = m(B(0, \epsilon))^{-1}\chi_{B(0,\epsilon)}$. Osoita, että $g_\epsilon * f(x) \to f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, kun $\epsilon \to 0$.

5. Osoita, että $\mathrm{spt}(f * g)$ on kompakti, jos funktioiden $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ kantajat ovat kompakteja.

6. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \in L^1(\mathbb{R})$, Fourier-muunnos on

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt, x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että jos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ja $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, niin

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Tässä voi käyttää seuraavia: Kompleksiarvoinen funktio $f = u+iv$, missä u ja v ovat reaaliarvoisia, on integroituva, jos ja vain jos u ja v ovat integroituvia, jolloin $\int f = \int u + i \int v$. Integraalin perusominaisuudet, esim. lineaarisuus ja Fubinin lause, ovat voimassa eikä niitä tarvitse perustella.