Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 3
11.-12.4.2013

1. Todista, että jos $1 \leq p \leq q \leq \infty$, niin kaikilla jonoilla $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, x_i \in \mathbb{R}$, on

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1.$$

Tässä $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, kun $p < \infty$, ja $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

2. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Osoita, että jos $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ ja $f \in L^q(\mu)$, niin on olemassa $g \in L^p(\mu)$ ja $h \in L^r(\mu)$ siten, että $f = g + h$.

3. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus, $1 \leq p < \infty$ ja $f_j \in L^p(\mu), j \in \mathbb{N}$, siten, että raja-arvo

$$\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x)$$

on olemassa μ m.k. kaikilla $x \in X$ ja

$$a = \liminf_{j \to \infty} \|f_j\|_p < \infty.$$

Osoita, että $f \in L^p(\mu)$ ja $\|f\|_p \leq a$.

4. Osoita, ettei Egorovin lauseessa voida yleensä valita joukkoa F niin, että $\mu(X \setminus F) = 0$.

5. Osoita, että Lusinin lauseessa voidaan luopua oletuksesta $m(A) < \infty$, jos vaaditaan vain, että joukko F on suljettu.

6. Mitallisten funktioiden jonon (f_j) sanotaan suppenevan mitan mielessä kohti mitallista funktiota f, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ pätee

$$\lim_{j \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_j(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Osoita, että jono (f_j) suppenee mitan mielessä kohti funktiota f, jos jollain $1 \leq p \leq \infty$ on $\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_p = 0$. Osoita esimerkillä, ettei käänteinen päde.