Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi 1
Harjoitus 2
4.-5.4.2013

1. Määritellään $\mu(A) = cardA$, kun $A \subset \mathbb{N}$, eli $\mu(A)$ on A:n alkioiden lukumäärä (∞, jos A on ääretön joukko). Osoita, että μ on mitta. Mitkä funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ovat μ-integroituvia ja mikä on niiden integraali $\int f d\mu$?

2. Olkoon $a > 0$. Määritellään $f(x) = |x|^{-a}$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Millä p:n, $1 \leq p \leq \infty$, arvoilla
(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
(2) $f \in L^p(B(0,1))$,
(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1))$?
Vihje: Integraaleja voi arvioida jakamalla $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ rengasalueisiin $B(0, 2^k) \setminus B(0, 2^{k-1}), k \in \mathbb{Z}$, ja käyttämällä tietoa $m(B(0,r)) = c(n)r^n$.

3. Osoita, että $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subset L^r(\mu)$, kun $1 \leq p \leq r \leq q$.

4. Olkoon $\mu(X) = 1$ ja $f : X \to (0, \infty)$ μ-mitallinen. Osoita, että

$$(\int_X \frac{1}{f} d\mu)^{-1} \leq \int_X f d\mu.$$

5. Oletetaan, että $f_j \to f$ avaruudessa $L^p(\mu)$ ja $g_j \to g$ avaruudessa $L^q(\mu)$, kun $j \to \infty$, missä $p, q > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Osoita, että $f_j g_j \to fg$ avaruudessa $L^1(\mu)$.

6. Anna esimerkki funktioista $f_j, f \in L^p(\mathbb{R})$ siten, että $f_j \to f$ tasaisesti, mutta (f_j) ei suppene avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$.