

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi 1
Harjoitus 1
21.3.-22.3.2013

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $E \in \Gamma$ ja

$$\Gamma_E = \{A \cap E : A \in \Gamma\}.$$

Osoita, että $(E, \Gamma_E, \mu|_{\Gamma_E})$ on mitta-avaruus.

2. Anna esimerkki mitta-avaruudesta (X, Γ, μ) , jossa μ saa vain arvot $0, 1/4, 3/4$ ja 1 . Onko olemassa mitta-avaruutta (X, Γ, μ) , jossa μ saa vain arvot $0, 1/4$ ja 1 ?

3. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Oletetaan, että (X, Δ, ν) on täydellinen mitta-avaruus (ts. ν on täydellinen mitta) siten, että $\Gamma \subset \Delta$ ja $\nu|_{\Gamma} = \mu$. Osoita, että (X, Γ, μ) :n täydellistymälle $(X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$ on $\bar{\Gamma} \subset \Delta$ ja $\nu|_{\bar{\Gamma}} = \bar{\mu}$.

4. Olkoon X epätyhjä joukko. Määritetellään $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \{0, 1\}$ asettamalla $\mu^*(A) = 1$, kun $A \neq \emptyset$, ja $\mu^*(A) = 0$, kun $A = \emptyset$. Osoita, että μ^* on ulkomitta. Mitä ovat μ^* -mitalliset joukot?

5. Todista, että $B \subset \mathbb{R}$ on Borelin joukko, jos ja vain jos se on Borelin joukko myös tasossa. Toisin sanoen,

$$\text{Bor}\mathbb{R} = \{B \subset \mathbb{R} : \{(x, 0) : x \in B\} \in \text{Bor}\mathbb{R}^2\}.$$

Onko suoran ja tason Lebesgue-mitallisten joukkojen välillä samanlaista yhteyttä?

6. Palauta mieleen Hausdorffin mitta Mitan ja integraalin kurssista (moniste 1.47) ja osoita, että $\mathcal{H}^s(E) \leq 1$, Cantorin $1/3$ -joukolle $E(p), p_i = 1/3$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, missä $s = \log 2 / \log 3$.