

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, luentoviikot 8–9

Petri Ola

Helsingin yliopisto

25.03.2013

Laplace-operaattorin perusratkaisu

Laplace-operaattori \mathbb{R}^d :ssä määritellään kaavalla

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Funktio $u \in C^2(\Omega)$ on *harmoninen* Ω :ssa ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin) jos

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Funktio

$$\Phi(x) = \begin{cases} \ln |x|/2\pi, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ |x|^{2-d}/(2-d)\omega_d, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad d \geq 3, \end{cases}$$

on Δ :n *perusratkaisu*. Tässä ω_d on \mathbb{R}^d :n yksikkökuulan pinta-ala.

Poissonin yhtälön ratkaisu

Olkoon $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Tällöin funktio

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - y) f(y) dy$$

toteuttaa Poissonin yhtälön

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Tämä ei suinkaan ole ainoa ratkaisu: jos esimerkiksi h on mikä tahansa koko \mathbb{R}^d :ssä harmoninen funktio, niin edelleen

$$\Delta(u + h) = f.$$

Todistus - osa I

Sen todistamiseen, että

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - y) f(y) dy = f(x)$$

käytetään Greenin kaavoja. Olkoon nyt x kiinteä. Tällöin muuttujanvaihdolla

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) f(x - y) dy,$$

joten koska f on kompaktikantainen, niin

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) (\Delta f)(x - y) dy.$$

Valitaan nyt $R > 0$ siten että $f(x - y) = 0$ kun $|y| \geq R$.

Todistus - osa II

Nyt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) \Delta f(x - y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < R} \Phi(y) \Delta f(x - y) dy.$$

Koska $\Delta\Phi(y) = 0$ kun $y \neq 0$, niin Greenin toisesta kaavasta seuraa

$$\int_{\varepsilon < |y| < R} \Phi(y) \Delta f(x - y) dy = \int_{|y|=\varepsilon} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial\mathbf{r}} f(x - y) - \Phi(y) \frac{\partial f(x - y)}{\partial\mathbf{r}} dS.$$

Tässä $\mathbf{r} = y/|y|$. Antamalla $\varepsilon \rightarrow 0$ saamme

$$\int_{|y|=\varepsilon} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial\mathbf{r}} f(x - y) dS \rightarrow f(x), \quad \int_{|y|=\varepsilon} \Phi(y) \frac{\partial f(x - y)}{\partial\mathbf{r}} dS \rightarrow 0.$$

Tämä todistaa väitteen.

Esityskaava

Samaan tapaan on mahdollista todistaa seuraava esityskaava ratkaisulle:
oletamme, että $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ toteuttaa yhtälön

$$\Delta u = f \in C(\bar{\Omega})$$

rajoitetussa alueessa Ω . Tällöin kaikilla $x \in \Omega$ pätee

$$u(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\Phi(x-y)}{\partial n(y)} - \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} dS(y).$$

Todistus seuraa soveltamalla Greenin kaavoja alueessa $\Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$ ja antamalla $\varepsilon \rightarrow 0$.

Heikko maksimiperiaate

Teoreema. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on rajoitettu ja avoin. Jos $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ on harmoninen Ω :ssa, niin

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Todistus: Oletetaan ensin että $\Delta u > 0$ koko Ω :ssa. Jos $x_0 \in \Omega$ on lokaali maksimi, niin

$$\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad i = 1, \dots, d,$$

ja summaamalla yli i :n saamme $\Delta u \leq 0$, joka on ristiriita joten u :lla ei voi olla lokaaleja maksimeja sisäpisteissä.

Todistuksen loppuosa

Oletetaan nyt että $\Delta u = 0$ Ω :ssa. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja määritellään

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2.$$

Tällöin

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta u + \varepsilon \Delta(|x|^2) = 2d\varepsilon > 0.$$

Soveltamalla todistuksen alkuosaa funktioon u_ε saamme

$$\begin{aligned} \max_{\partial\Omega} u &\leq \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon \\ &= \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon D^2, \end{aligned}$$

missä $D = \sup_{\Omega} |x|$. Antamalla tässä $\varepsilon \rightarrow 0$ saamme väitteen.