Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, luentoviikot 5–7

Petri Ola

Helsingin yliopisto

07.03.2013

Lämpöyhtälön reuna–alkuarvo–ongelma

Tarkastelemme jatkossa seuraavaa ongelmaa:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

missä $k > 0$ on vakio. Asetamme lämpötilajakaumaksi hetkellä $t = 0$,

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L,$$

sekä pidämme päätepisteet koko ajan vakiolämpötilassa $= 0$,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0.$$

Haluamme löytää täman ongelman ratkaisulle sopivan esityksen.

Muuttujien separointi

Etsitään ensin yhtälölle

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

olevia ratkaisuja. Sijoittamalla yhtälöön saamme ehdon (oletamme että $X(x),\ T(t) \neq 0)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{kX''(x)}{X(x)} = \lambda$$

missä λ on *separointivakio*. Vaadimme lisäksi että $X(0) = X(L) = 0$. Tällä on epätriviaaleja ratkaisuja $u_n = X_n T_n$ vain kun

$$\lambda = \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2 k}{L^2},\ n = 1,\ 2\ \ldots$$

Tällöin kerroinvakiota vaille

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L),\ T_n(t) = \exp(-n^2\pi^2 kt/L^2).$$

Ratkaisu Fourier–sarjana

Etsimme nyt alkuperäisen reuna–alkuarvo–ongelman ratkaisua sarjana

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) \exp(-n^2\pi^2 kt/L^2).$$

Sijoittamalla formaalisti $t = 0$ saamme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L),$$

eli A_n on funktion f Fourier-sinikerroin

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^{\pi} f(x) \sin(\pi x/L)\, dx.$$

Tämä antaa ratkaisun $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C(\{t \geq 0\})$ mikäli $f \in C^2([0, L])$ toteuttaa ehdot $f(0) = f(L) = f'(0) = f'(L) = 0$.

Aaltoyhtälön reuna–alkuarvo–ongelma

Tarkastelemme vastaavaa ongelmaa aaltoyhtälölle:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0.$$

Asetamme alkuarvoiksi hetkellä $t = 0$,

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 < x < L,$$

sekä pidämme päätepisteet koko ajan paikoillaan,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0.$$

Haluamme löytää täman ongelman yksikäsitteisen ratkaisun.

Muuttujien separointi

Etsitään nyt yhtälölle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

olevia ratkaisuja. Sijoittamalla yhtälöön saamme ehdon (oletamme että $X(x),\ T(t) \neq 0)$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

missä λ on separointivakio. Vaadimme lisäksi että $X(0) = X(L) = 0$. Tällä on epätriviaaleja ratkaisuja $u_n = X_n T_n$ vain kun

$$\lambda = \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1,\ 2\ \dots\ ,$$

jolloin kerroinvakiota vaille

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L),\ T_n(t) = A_n \cos(cn\pi t/L) + B_n \sin(cn\pi t/L).$$

Ratkaisu Fourier–sarjana

Etsimme nyt alkuperäisen reuna–alkuarvo–ongelman ratkaisua sarjana

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x/L)\{A_n \cos(cn\pi t/L) + B_n \sin(cn\pi t/L)\}.$$

Derivoimalla ja sijoittamalla formaalisti $t = 0$ saamme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L),\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{L} \sin(n\pi x/L),$$

joten

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx,\ B_n = \frac{2}{cn}\int_0^L g(x)\sin(n\pi x/L)\,dx.$$

Tämä antaa ratkaisun $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C^1(\{t \geq 0\})$ mikäli $f \in C^4([0,L])$ ja $g \in C^3([0,L])$ toteuttavat sopivat yhteensopivuusehdot välin päätepisteissä.

Energia–estimaatti

Olkoon $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C^1(\{t \geq 0\})$ aaltoyhtälön ratkaisu. Määritellään *energia hetkellä* $t \geq 0$ kaavalla

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t(x,t))^2 + c^{-2}(u_x(x,t))^2 \, dx.$$

Nyt osittainintegroimalla

$$E'(t) = \int_0^L u_t u_{tt} + c^{-2} u_x u_{xt} \, dx = \int_0^L u_t(u_{tt} - c^{-2} u_{xx}) \, dx = 0,$$

eli $E(t)$ on vakio. Erityisesti, jos $f = g = 0$ saamme että $\nabla_{(x,t)} u = 0$, eli u on vakio, joten koska se häviää hetkellä $t = 0$ on oltava $u(x,t) = 0$. Siis ratkaisumme on yksikäsitteinen.