Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, 4. luentoviikko

Petri Ola

Helsingin yliopisto

11.02.2013

Heikot ratkaisut

Lokaali–integroituva funktio u on määritelmän mukaan aaltoyhtälön

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ t > 0$$

heikko ratkaisu, jos kaikilla $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ pätee

$$\int \int_{t>0} u(x,t)(\varphi_{tt}(x,t) - c^2 \varphi_{xx}(x,t))\, dxdt = 0.$$

Osoitimme approksimoimalla epäjatkuvaa alkudataa sileillä funktioilla että D'Almebertin kaava määrää heikon ratkaisun joukossa $\{t > 0\}$. **Huom:** Alkuehtojen voimassaolo on hieman hankalampi asia, ja tästä myöhemmin.

Määräytyvyys- ja vaikutusalueet

Tarkastellaan D'Alembertin kaavan antamaa ratkaisua

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Huomataan, että alkuarvot pisteessä x vaikuttavat ratkaisun u arvoihin vain joukossa $E_+((x,0)) = \{(x',t);\ x-ct \le x' \le x+ct,\ t>0\}$. Tätä kutsutaan *pisteestä* $(x,0)$ *lähteväksi eteenpäin suunnatuksi valokartioksi*.

Edelleen, huomataan, että $u(x,t)$ riippuu alkuarvoista vain välillä $[x-ct, x+ct]$.

Epähomogeeniset alkuarvo–ongelmat

Olkoon

$$E_-(x,t) = \{(x',t');\ x - c(t-t') \le x' \le x + c(t-t'),\ t' < t\}$$

pisteestä (x,t) *lähtevä taaksepäin suunnattu valokartio*. Tarkastellaan epähomogeenista alkuarvo–ongelmaa

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t),\ t > 0,$$

kun hetkellä $t = 0$ vaadimme

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Tämän yksikäsitteinen ratkaisu saadaan D'Alembertin kaavan yleistyksestä

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_{\Delta(x,t)} F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

missä $\Delta(x,t) = E_-(x,t) \cap \{t > 0\}$.

Ratkaisun stabiilisuus

Edellisen sivun ratkaisulle pätee arvio

$$\sup_{x\in\mathbb{R},0\leq t\leq T} |u(x,t)| \leq \sup_x |f(x)| + T \sup_x |g(x)| + \frac{T^2}{2} \sup_{x\in\mathbb{R},\, 0\leq t\leq T} |F|.$$

Samanlaisia arvioita on mahdollista todistaa myös u:n derivaatoille, kunhan alkuarvot ovat riittävän sileitä.

Huomaamme, että aalto–yhtälön Cauchy–ongelmalle pätevät seuraavat ominaisuudet: 1) Sillä on aina ratkaisu, 2) Ratkaisu on yksikäsitteinen ja 3) Ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuarvoista (eli stabiliteetti). Sanomme, että tämä ongelma on *hyvin asetettu*. Ongelma on *huonosti asetettu*, mikäli jokin näistä ehdoista ei toteudu. Kuten totesimme on Burgersin yhtälön alkuarvo–ongelma huonosti asetettu jos tarkastelemme sitä kaikilla positiivisilla ajanhetkillä.