Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, 3. luentoviikko

Petri Ola

Helsingin yliopisto

04.02.2013

Burgersin yhtälö

Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$u_t + u\, u_x = 0, \quad u(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Huomaa että riippumattomat muuttujat ovat nyt t, "aika" ja x, "paikka". Karakteristiset käyrät saadaan alkuarvo–ongelmasta

$$t(\tau,s) = 1,\ x'(\tau,s) = u,\ u'(\tau,s) = 0,$$

eli

$$t(\tau,s) = \tau,\ u(\tau,s) = h(s),\ x(\tau,s) = \tau h(s) + s.$$

Voimme kirjoittaa nämä implisiittiseen muotoon

$$u = h(x - tu).$$

Ratkaisu ei ole derivoituva kaikilla ajan hetkillä

Derivoimalla implisiittisesti muuttujan x suhteen saamme

$$u_x = h'(x - tu)(1 - tu_x)$$

josta ratkaisemalla

$$u_x(x,t) = \frac{h'(x - tu(x,t))}{1 + h'(x - tu(x,t))t} = \frac{h'(s)}{1 + h'(s)t}$$

joka lähenee itseisarvoltaan ääretöntä kun

$$t \to -1/h'(s).$$

Huomaa että mikäli alkuarvokäyrä on aidosti kasvava, ratkaisu ei ole derivoituva kaikkialla menneisyydessä. Vastaavasti, jos h on aidosti vähenevä, ratkaisu ei ole derivoituva kaikkialla tulevaisuudessa.

Leikkaavat karakteristikat

Karakteristikat saamme yhtälöstä

$$x = h(s)t + s, \; s \in \mathbb{R}.$$

Tämä on siis x–t–tason suora, joka leikkaa x–akselin pisteessä $(s, 0)$, ja jonka kulmakerroin on $-1/h(s)$. Tällä suoralla u saa vakioarvon $h(s)$. Oletetaan että $s_1 < s_2$. Jos $h(s_1) < h(s_2)$, niin nämä suorat leikkaavat alemmassa puolitasossa $t < 0$, ja jos taas $h(s_1) > h(s_2)$, niin karakteristikat leikkaavat ylemmässä puolitasossa. Leikkauspisteessä ratkaisun arvo ei ole määritelty.

1–ulotteinen aaltoyhtälö

Olkoon $c > 0$ vakio. Tarkastellaan 1–ulotteista aaltoyhtälöä

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Tässä $t, x \in \mathbb{R}$. Siirtymällä muuttujiin

$$\xi = x - ct, \ \eta = x + ct,$$

ja käyttämällä ketjusääntöä saamme aaltoyhtälön muotoon

$$u_{\eta\xi} = 0.$$

Tämän yleinen kahdesti differentioituva ratkaisu on muotoa $\Phi(\xi) + \Psi(\eta)$, missä Ψ ja Φ ovat mielivaltaisia yhden muuttujan kahdesti differentioituvia funktioita. Sijoittamalla saamme aaltoyhtälön yleiseksi ratkaisuksi

$$u(x,t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct).$$

Cauchy–ongelma

Tarkastellaan nyt alkuarvo- eli Cauchy–ongelmaa

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ t > 0,$$

kun hetkellä $t = 0$ vaadimme

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Sijoittamalla $u(x,t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$ saamme ehdot

$$f = \Psi + \Phi,\ g/c = \Psi' - \Phi'.$$

Tästä voimme ratkaista $f' + g/c = 2\Psi'$ ja $f' - g/c = 2\Phi'$, ja integroimalla saamme ns. *D'Alembertin kaavan*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$